Band
1

REGIONALE LEHRERFORTBILDUNG

Bezirksregierung Hannover

Lernwerkstatt Mathematik

Unterrichtsbaustein Platonische Körper

Inhaltsverzeichnis

Lieber Leser!

Der vorliegende Unterrichtsbaustein Platonische Körper wurde in der Lernwerkstatt Mathematik, eine regionale Lehrerfortbildung der Bezirksregierung Hannover, gemeinsam erstellt. Die Teilnehmer dieser Werkstatt arbeiteten über ein Jahr lang an dem Thema. Viele Unterrichts Ideen wurden praktisch erprobt, neu diskutiert und teilweise neu bearbeitet.

Wir haben uns für das Thema Platonische Körper interessiert, da der bisherige Geometrie Unterricht vorwiegend ein Unterricht der Berechnungen ist. Es ist unserer Meinung nach Aufgabe des Mathematik Unterrichts die Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens zu fördern. Lehrangebote, die in geeigneter Weise die bisherigen Anteile des Geometrie Unterrichts (Berechnungen) und Aspekte der räumlichen Vorstellung verknüpfen, gibt es kaum.

Ein weiterer wichtiger Schwerpunkt ist die Umsetzung der Handlungsorientierung. Viele Materialien, die hier beschrieben werden, fördern das Denken über das selbsttätige Tun. Auch wurde moderne Hilfsmittel des Mathematikunterrichts (dynamische Geometrie Programme) aufgenommen und in den Unterricht integriert.

Die vorliegende Materialsammlung ist so umfangreich, die Unterrichtsideen sind so vielseitig, dass man unmöglich alles in einer Lerngruppe umsetzen kann. Die Auswahl ist Aufgabe des Unterrichtenden.

Hierbei wünschen wir viel Spaß

Andreas Koepsell
Charlottenstr. 11
30449 Hannover
Koepsell@erz.uni-hannover.de

Komponenten der Intelligenz

Sprachliche Intelligenz

Sie ist das hervorstechendste Merkmal der menschlichen Intelligenz. Kinder lernen die Sprache beiläufig zwischen dem ersten und dritten Lebensjahr. Anregungen aus der Umgebung und Übung führen dazu, dass sich sprachliche Intelligenz entwickeln kann. Zudem wird Sprache überall gefordert - in der Schule, im Alltag, im Beruf. Qualitäten der sprachlichen Intelligenz, die zu früheren Zeiten sehr wichtig waren, z.B. das mündliche Weitergeben von Sagengut, Traditionen und Heilwissen, treten heute in den Hintergrund.

Logisch-mathematische Intelligenz

Die logisch-mathematische Intelligenz steht für analytisches, folgerichtiges "Kombinieren", das sogenannte vertikale Denken vom Stil "Aktivität X führt zu Effekt Y" usw. Sie ist bei Rechtshändern in der linken Hirnhälfte angesiedelt.

Körperlich-kinästhetische Intelligenz

Die körperlich-kinästhetische Intelligenz oder "Körperbeherrschung" wird bei unserem westlichen Lebensstil vernachlässigt. Dennoch sind auch hier ausgesprochene Begabungen zu beobachten, z.B. bei Sportlern, Tänzern, Pantomimen oder allen Menschen mit "geschickten Händen". Die Fähigkeit der Nachahmung, bei Kindern besonders stark ausgebildet, ist körperlich-kinästhetische Intelligenz.

Musikalische Intelligenz

Sie zeigt sich daran, Rhythmen oder Melodien leicht aufzufassen. Nach Schlaganfällen ist oft zu beobachten, dass Menschen nicht mehr sprechen können, aber sie können immer noch Melodien - samt Text! - singen. Ein Beleg dafür, dass diese Art der Intelligenz ihre eigene Repräsentation auf der Hirnrinde hat.

Räumliche Intelligenz

Hohe räumliche Intelligenz besitzen Menschen, die über einen guten Orientierungssinn verfügen, die ein gutes räumliches Vorstellungsvermögen haben (wichtig z.B. für Architekten, Bildhauer, Chirurgen und alle Berufe, in denen plastisch gestaltet werden muss). Prüfen lässt sie sich beispielsweise, indem man Körper vorgibt, die gedanklich in alle Richtungen gedreht werden müssen.

Interpersonale Intelligenz

Interpersonale Intelligenz spielt bereits in die emotionale "Intelligenz". Sie tritt in Aktion, wenn es darum geht, die Gefühle und Reaktionen der Mitmenschen richtig zu taxieren, "Gedanken zu lesen". Diese Eigenschaft wird heute als immer wichtiger in der Personalführung erkannt, aber auch in der Werbung und in der Psychologie ohnehin. Auch hier sind Frauen den Männern in der Regel überlegen. Sogenannte Führungspersönlichkeiten verfügen über ein hohes Maß an interpersonaler Intelligenz.

Intrapersonale Intelligenz

Diese Intelligenzform dagegen erschließt die Selbsterkenntnis, die für ein erfolgreiches (Über)leben ebenso wichtig ist wie die anderen Intelligenzbereiche. Autisten haben eine stark eingeschränkte intrapersonale Intelligenz. Wer über ein hohes Maß an dieser Intelligenz verfügt, überschätzt seine Fähigkeiten nicht, sondern setzt sie gezielt dort ein, wo sie nützlich sind und vermeidet eher Aktivitäten, die ihm weniger "liegen".

Wilfried Jannack

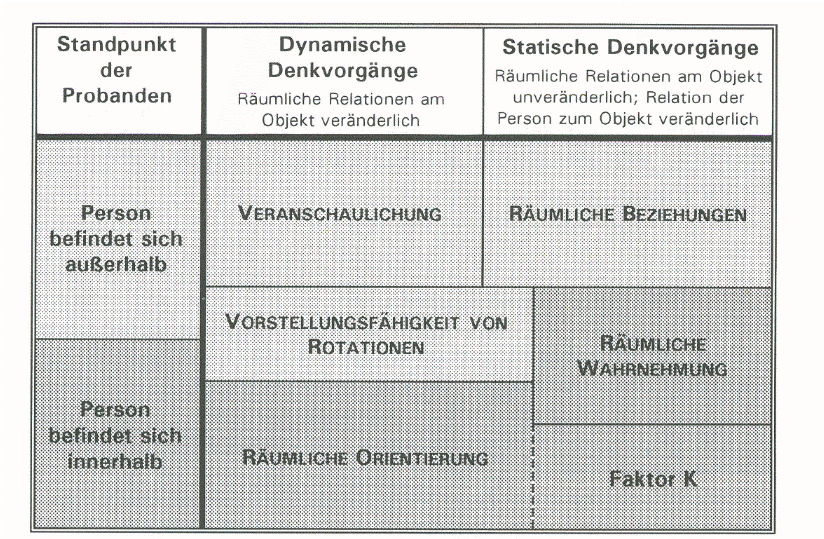
Komponenten des räumlichen Vorstellungsvermögens

Was ist das denn überhaupt, räumliches Vorstellungsvermögen?

Peter H. Maier hat in "Räumliches Vorstellungsvermögen", Donauwörth 1999 (Auer Verlag) versucht alle Gedanken, die dazu jemals gedacht wurden, zusammenzufassen. Mehr Klarheit kriegt ein normaler Mensch dadurch auch nicht. Zum Schluss bleiben fünf Komponenten über, die man sich m.E. wiederum nicht merken kann.

Entscheidend - und auch merk- und behaltbar - ist allerdings, dass er zwei Kategorien unterscheidet:

1) Denkvorgänge mit räumlichen Beziehungen sind **dynamisch** oder **statisch**.
2) Die Person befindet sich **außerhalb** oder **innerhalb**.



Tab. 4: Die Faktoren des räumlichen Vorstellungsvermögens

Ganz knapp versuche ich die fünf wesentlichen Komponenten räumlich-visueller Qualifikationen zu beschreiben und jeweils mit einer Abbildung zu verdeutlichen. Trennscharf ist m.E. diese Einteilung nicht.

(1) **Räumliche Wahrnehmung** (Spatial perception) charakterisiert die Fähigkeit zur <u>Identifikation der Horizontalen und Vertikalen</u> (dazu die Abbildung aus Maier, S. 46)

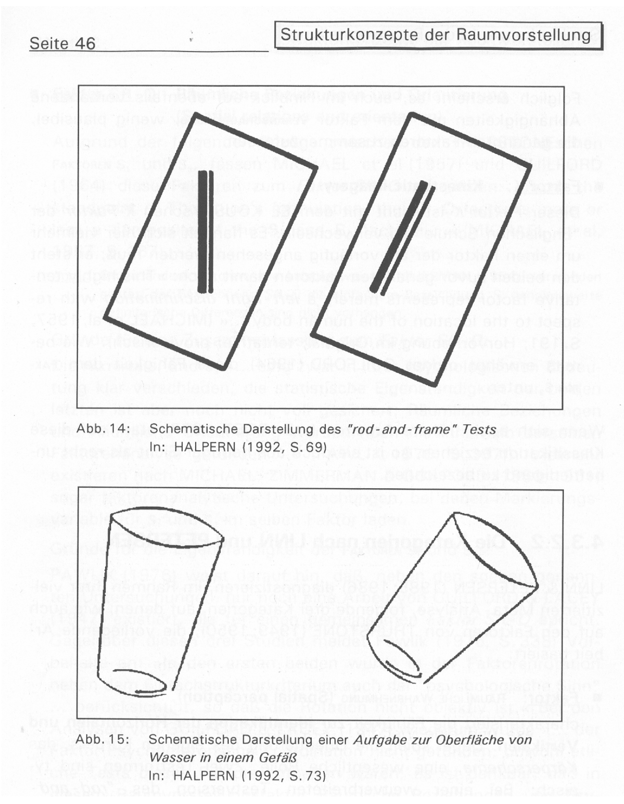


Abb. 14: Schematische Darstellung des *"rod-and-frame" Tests* In: HALPERN (1992, S. 69)

Abb. 15: Schematische Darstellung einer *Aufgabe zur Oberfläche von Wasser in einem Gefäß* In: HALPERN (1992, S. 73)

(2) **Veranschaulichung oder Räumliche Visualisierung** (Visualization, Faktor Vz) umfasst die gedankliche Vorstellung von räumlichen Bewegungen.

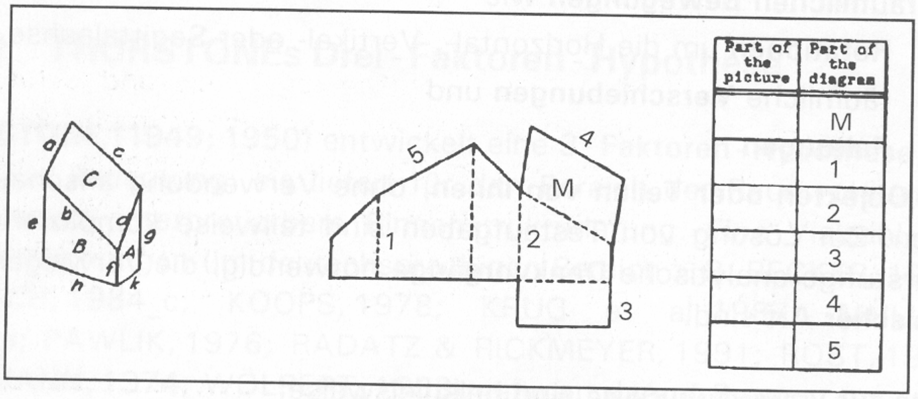


Abb. 4: Test *Surface Development* nach THURSTONE (1938)
In: THURSTONE (1938, S. 37)

(3) **Vorstellungsfähigkeit von Rotationen** (Mental rotation) meint die Fähigkeit, sich schnell und exakt <u>Rotationen von 2- oder 3-dimensionalen Objekten</u> vorzustellen.

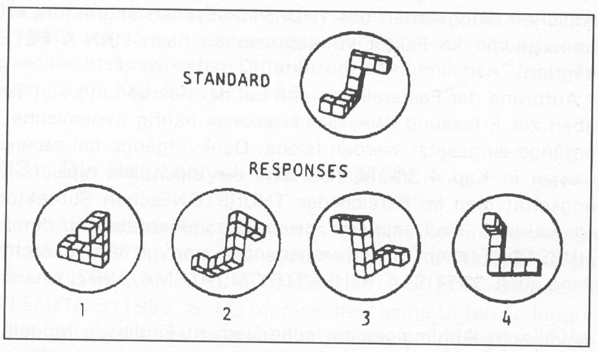


Abb. 16: Test *Mental rotation* nach SHEPARD & METZLER (1971); modifiziert von VANDENBERG & KUSE (1978)
In: LINN & PETERSEN (1985, S. 1483)

(4) Räumliche Beziehungen (Spatial relations) meint das richtige <u>Erfassen räumlicher Konfigurationen on Objekten oder Teilen von ihnen</u>. Es ist eher statischer Natur (starre und formfeste Objekte).

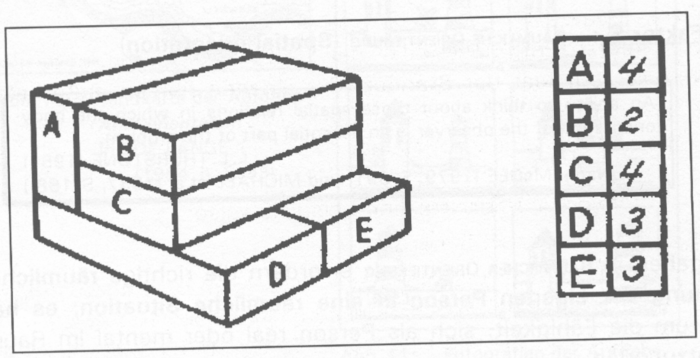


Abb. 8: Test *Block-counting* nach THURSTONE (1938)
In: THURSTONE (1938, S. 31)

(5) **Räumliche Orientierung** (Spatial orientation) meint das richtige räumliche <u>Einordnen der eigenen Person in eine räumliche Situation.</u>

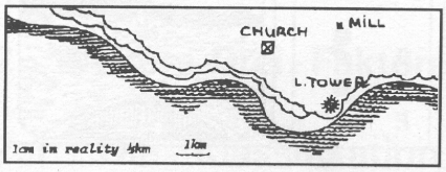


Abb. 10: Landkarte der Aufgabe
Arial orientation
In: DE LANGE (1984_b, S. 93)

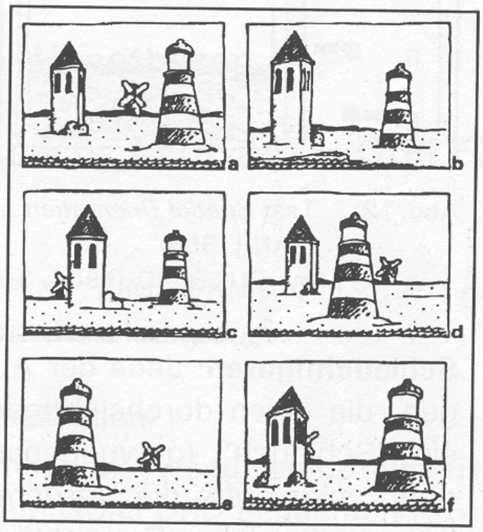


Abb. 11: Fotografien der Aufgabe
Arial orientation
In: DE LANGE (1984_b, S.93)

Dieses letzte Beispiel ist so schön, dass man es direkt im Unterricht einsetzen kann.

Die Komponenten entstammen vorwiegend psychologischen Tests. Diese sind vorwiegend im angelsächsischen Raum entstanden. Aus diesem Grund - und nicht um die Leser/innen zu verwirren - habe ich die englischen Begriffe mit aufgenommen.

Alle Abbildungen stammen aus Maiers Buch (s.o.).

Flächen und Körper

Ein Lehrangebot für eine 8. Klasse einer Integrierten Gesamtschule

Zusammengestellt von Andreas Koepsell, Charlottenstr.11 30449 Hannover

Die vorliegende Unterrichtsbeschreibung habe ich im Jahr 2001 in einer 8. Klasse der IGS Roderbruch durchgeführt. Laut schulinternem Stoffverteilungsplan sollte die Flächenberechnung behandelt werden. Diese Unterrichtseinheit erfüllt die Ansprüche einer „veränderten Unterrichtskultur“ nicht:

- Geometrie wird als Kunst der Berechnung gelehrt und bleibt vorwiegend in diesem Zusammenhang.
- Komplexe geometrische Zusammenhänge werden nicht dargeboten.
- Die Raumvorstellung wird nicht geschult.
- Handlungsorientierung ist in einem solchen durch „Unterrichtseinheiten“ sequentierten Lehrgang nicht möglich.

Ausgehend von dieser Kritik am Stoffplan versuchte ich ein Lehrangebot zu kombinieren, in dem die oben genannten Kriterien berücksichtigt wurden.
„Flächen und Körper“ behandelt:

- Konstruktionen und Berechnungen von regelmäßigen und unregelmäßigen Vielecken.
- Körper, deren Begrenzungsflächen aus regelmäßigen Vielecken bestehen.
- Bau, Beschreibung und Definition von Platonischen und Archimedischen Körpern.
- Räumliche Darstellungen der Körper.

Die Vielseitigkeit dieses Lehrangebotes wird in der kurzen Beschreibung deutlich.

Viele Anregungen für diesen Unterricht verdanke ich der „Lernwerkstatt Mathematik“, einer regionale Lehrerfortbildung der Bezirksregierung Hannover. Diese Fortbildung besteht aus einer sich zweimal im Halbjahr treffende Lehrergruppe, die kontinuierlich an einem Thema arbeitet. Durch diese Arbeitsweise können viele Ideen ausprobiert und umgesetzt werden. Eine solche Fortbildung ermöglicht die Zusammenarbeit zwischen Lehrerinnen / Lehrern.

Einige der dort entstandenen Ideen habe ich in dieser Beschreibung aufgenommen, konnte sie aber in meiner Klasse nicht umsetzen. Die Zusammenarbeit der LeherInnen in der „Lernwerkstatt“ hat ein umfassendes Lehrangebot entwickelt, dass nicht vollständig von einer Lerngruppe umgesetzt werden kann.

Inhaltsverzeichnis:

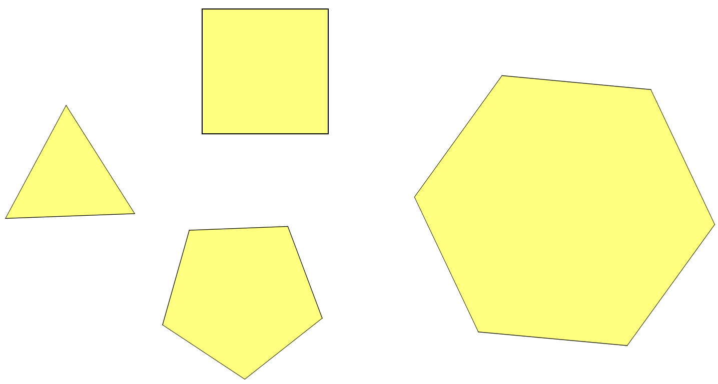
1.: Regelmäßige Vielecke!

Die Schülerinnen und Schüler hatten im 7. Jahrgang gelernt, Dreiecke und Vierecke zu konstruieren. Auch einige besondere Größen und Punkte im Dreieck (Höhen, Mittelsenkrechten, Winkelhalbierende und deren Schnitpunkte) waren bekannt. Das Haus der Vierecke wurde im 7. Jahrgang behandelt. Die Eigenschaften der meisten Figuren konnten als bekannt vorausgesetzt werden.

Wir begannen mit einer Erinnerung und einigen Dreiecks-Konstruktionen. Da die Kongruenzsätze des Dreiecks in 7 behandelt wurden, erweiterten wir dies auf die Behandlung von Vierecken:

> Wie viel Größen müssen gegeben sein, um ein beliebiges Viereck eindeutig bestimmen zu können? Stelle einen Kongruenzsatz für ein beliebiges Viereck auf.
>
> Wie viel Größen sind es bei Vierecken mit besonderen Eigenschaften?

<u>Die Beschäftigung mit regelmäßigen Vielecken:</u>



Definition:

> In regelmäßigen Vielecken sind alle Seiten gleich lang und alle Winkel gleich groß.

Die einfachsten regelmäßigen Vielecke, das regelmäßige Dreieck und das regelmäßige Viereck, wurden mit vorgegebener Kantenlänge konstruiert. Beim regelmäßigen Dreieck musste der Innenwinkel über die Winkelsumme im Dreieck berechnet werden. Will man nun regelmäßige N Ecke mit $n > 4$ konstruieren, so muss man sich mit deren Winkelsumme beschäftigen.

Arbeitsauftrag:

> Zeichne ein beliebiges Fünfeck, miss alle Innenwinkel und berechne die Winkelsumme.
>
> Zeichne ein beliebiges 6 Eck, miss alle Innenwinkel und berechne die Winkelsumme.

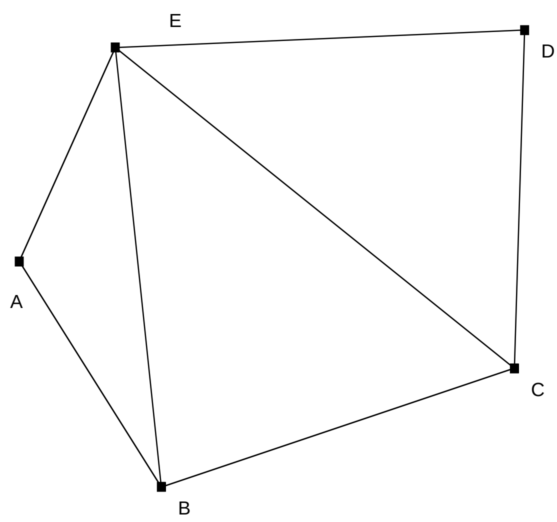
Da nun jeder Schüler / jede Schülerin ein unterschiedliches N - Eck gezeichnet hat, wird beim Sammeln der Ergebnisse offensichtlich, dass hier eine Regelmäßigkeit vorliegen muss. Deutlich wird aber auch, dass viele Messfehler vorkommen, insbesondere wenn Winkel größer als 90° oder gar 180° sind. Man sammelt diese Ergebnisse in einer Tabelle:

Ecken Anzahl	*Bezeichnung*	*Winkelsumme*
3	Dreieck	$180° = 1 \cdot 180°$
4	Viereck	$360° = 2 \cdot 180°$
5	Fünfeck	$540° = 3 \cdot 180°$
6	Sechseck	$720° = 4 \cdot 180°$

Begründungen / Beweise:

Die recht ungenauen Messungen der Schülerinnen und Schüler lassen eine Vermutung in der oben beschriebenen Richtung zu. Dabei ist das Ausfüllen der oben dargestellten Tabelle im Unterricht wichtig, um diese Vermutung gemeinsam reifen zu lassen.
Man kann diese Vermutung auf zwei unterschiedliche Weisen belegen. Die in der Winkelsumme enthaltene Rechnung legt nahe, dass hier die Winkelsumme des Dreiecks immer wieder eine Rolle spielt . Man kann leicht zeigen, dass sich ein beliebiges Fünfeck so in drei Dreiecke zerlegen läßt, dass alle Winkel der Dreiecke gemeinsam die Winkel des Fünfecks ergeben.

Die hier gezeigte Form der Zerlegung ist eine Zerlegungsart.
Schreibt man nun in jedes Dreieck die Winkelsumme ein, so wird deutlich, dass die Winkelsumme im Fünfeck 540° sein muss.



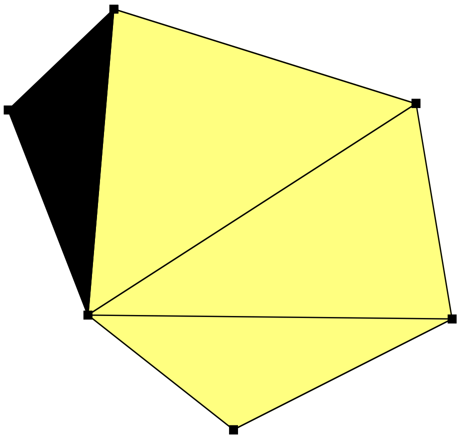
Die Überlegung muss weiter verallgemeinert werden:

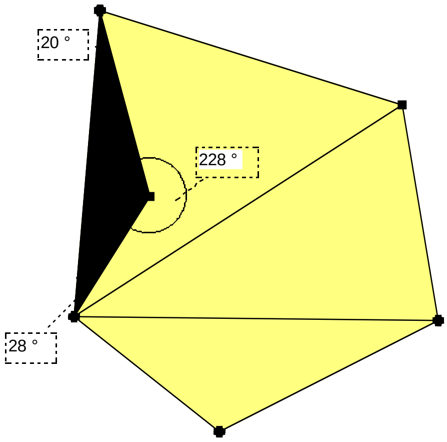
Erhöht man die Eckenzahl eines N – Ecks um eins, so wächst die Winkelsumme um 180°. Dies steckt zusätzlich als Erkenntnis in der oben abgebildeten Tabelle.

Für einen Beweis muss man eine Fallunterscheidung treffen:

Fall I:
Gegeben ist ein beliebiges N – Eck. Es wird durch eine zusätzliche Ecke vergrößert. Diese Ecke liegt außerhalb der Fläche des N – Ecks. Es wird schnell sichtbar, dass das N – Eck um eine Dreiecks-Fläche wächst.

Fall II:
Gegeben ist ein beliebiges N – Eck. Es wird durch eine zusätzliche Ecke „vergrößert“. Diese Ecke liegt innerhalb der Fläche des N – Ecks. Nun werden zwei Winkel des bestehenden N – Ecks verkleinert. Die Winkelsumme wächst aber um einen überstumpfen Winkel.
Eine Verallgemeinerung der Beziehungen zwischen drei Winkeln ergibt eine allgemeine Lösung.





Allgemeine Formulierung:

Da in der 7. und 8. Klasse der Einstieg in das Rechnen mit Variablen erfolgt, sollte an dieser Stelle auch eine allgemeine Formulierung durchgeführt werden. Die SchülerInnen wurden beauftragt, in einem Satz den in der Tabelle sichtbaren Zusammenhang darzustellen.

Dabei wurden Unterschiede in den Abstraktionsleistungen der SchülerInnen deutlich. Viele Schüler / Schülerinnen formulierten Sätze für ein bestimmtes N – Eck. Einige SchülerInnen formulierten den Zuwachs und einem großen Teil gelang auch eine allgemeine Formulierung.

Im zweiten Schritt sollte eine Formel aufgestellt werden. Dazu wurden folgende Variablen gesetzt:

n	Anzahl der Ecken
W	Winkelsumme

$$W = (n - 2) \cdot 180°$$

$$W = n \cdot 180° - 360°$$

Innere Differenzierung:

Viele dieser beschriebenen Unterrichtsschritte setzen bei SchülerInnen sprachliche Kompetenzen voraus. Diese werden aber auch im Umgang mit den beschriebenen Formulierungen schrittweise erworben.

In einigen Fällen könnte dies für Jugendlichen eine hohe Anforderung bedeuten. Daher sei an dieser Stelle ergänzend eine zweite Erarbeitungs-Möglichkeit erwähnt. **Dies ist aber keine unterrichtliche Alternative** im ursprünglichen Bedeutungssinn dieses Ausdrucks! Man kann die Erarbeitung der Winkelsumme im n – Eck auch mit einem dynamischen Geometrie Programm[1] durchführen. Die benötigten Befehle sind begrenzt:

1 Ich bevorzuge das Programm Dynamische Geometrie Euklid von R. Mechling. Es ist von SchülerInnen schnell zu erlernen und ist auch als Schulversion sehr kostengünstig. Der Funktionsumfang ist vollkommen ausreichend.

- Erzeugen eines beliebigen N – Ecks.
- Messen aller Innenwinkel. (Das Messen eines Winkels muss den Schülerinnen erläutert werden. Winkel werden bei „Euklid“ durch die Eingabe von Punkten definiert.)
- Berechnen der Winkelsumme im Termfenster.
- Verändern der Ausgangsfigur durch den Zugmodus.

Mit einem solchen Vorgehen ist die Winkelsumme für **ein** N – Eck für Schüler tatsächlich „bewiesen“. Das das (N + 1) – Eck eine um 180° vergrößerte Winkelsumme besitzt, läßt sich allerdings mit diesem Programm so nicht zeigen.

Konstruktion von regelmäßigen Vielecken:

Mit den oben beschriebenen Erkenntnissen lassen sich beliebige regelmäßige und unregelmäßige Vielecke konstruieren. Eine besondere Eigenschaft von regelmäßigen Vielecken ist aber die Tatsache, dass sie einen Umkreis besitzen. Über diese Eigenschaft lassen sich regelmäßige Vielecke oft einfacher konstruieren.

Man kann diese Eigenschaft beispielhaft zeigen. Versuche, dies zu beweisen, übersteigen meist die Fähigkeiten eines Schülers / Schülerin einer 8. Klasse.

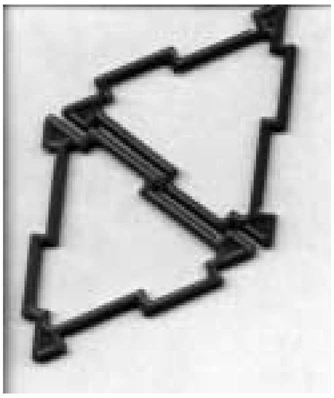
Konstruktionen über den Umkreis sollten aber unbedingt durchgeführt werden.

Aufgabenbeispiele:

a.) Konstruiere ein regelmäßiges Fünfeck mit der Seitenlänge a = 5 cm. Zeige, dass der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Mittelpunkt des Umkreises ist. Wie groß ist der Radius dieses Umkreises? (Messung)
b.) Konstruiere ein regelmäßiges Sechseck mit a = 6 cm. Konstruiere den Mittelpunkt des Umkreises. Zeige, dass das regelmäßige Sechseck aus 6 regelmäßigen Dreiecken besteht!

2: Bau der platonischen Körper

2.1: Arbeiten mit Frameworks



Das Bausystem Frameworks besteht aus Plastik-Elementen, die sich durch Aneinanderdrücken verbinden lassen. Diese sind geformt als regelmäßige Dreiecke, Vierecke, Fünfecke und Sechsecke.
Mit diesem System kann man sehr schnell von SchülerInnen in Gruppenarbeit die Platonischen Körper finden lassen. Voraussetzung ist, dass man mit den Schülern über eine Definition der Platonischen Körper spricht.

Platonische Körper sind aus regelmäßigen Vielecken aufgebaut. Alle Begrenzungsflächen des Körpers sind gleich. Alle Ecken des Körpers sind gleich.

Mit diesem Material haben die SchülerInnen innerhalb von 15 Minuten alle platonischen Körper gefunden. Einige Gruppen entdecken den Ikosaeder nicht. Als Differenzierungsmaßnahme für schnellere Schülergruppen habe ich die Fragestellung bearbeiten lassen: Kann man die oben genannte Definition eines platonischen Körpers verkürzen? Sind alle drei genannten Eigenschaften notwendig?

Die gebauten Modelle der platonischen Körper wurden im Klassenraum aufgehängt und wir beschäftigten uns gemeinsam mit der Beschreibung und den Eigenschaften dieser Körper.

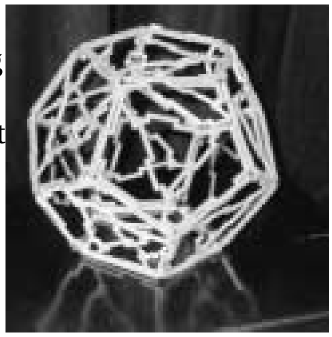
Körper	*Flächen*	*Ecken*	*Kanten*
Tetraeder	4	4	6
Würfel (Hexaeder)	6		
Oktaeder	8		
Dodekaeder	12		
Ikosaeder	20		

Die Schülerinnen und Schüler sollten die Tabelle oben ausfüllen. Sie erhielten dazu ein Arbeitsblatt, auf dem die Körper räumlich dargestellt waren[2]. Die Jugendlichen arbeiteten in Gruppen (3 – 4 Schüler) und verfolgten unterschiedliche Strategien:

- Zählen am konkreten Körper: Dies wurde zunächst an den einfachen Körpern versucht, Es zeigte sich aber, dass diese Strategie sehr fehleranfällig war. Außerdem waren bewusst nicht alle Körper in jeder Schülergruppe vorhanden, so dass die Suche nach anderen Strategien wichtig wurde.
- Strategisches Vorgehen: Die Schüler gingen von der Flächenanzahl aus. Beispiel: Ein Oktaeder besteht aus 8 regelmäßigen Dreiecken. Liegen alle Dreiecke getrennt, so erhält man $8 \cdot 3 = 24$ Ecken. Da beim Zusammenfügen des Körpers aber immer 3 Flächen in einer Ecke zusammen stoßen, hat der Körper $24 : 3 = 8$ Ecken. Die Anzahl der Kanten erhält man in ähnlicher Weise. Ausgangspunkt ist wieder die bekannte Anzahl der Flächen. Jede Fläche hat drei Seiten: $3 \cdot 8 = 24$ Seiten. Fügt man den Körper zusammen, so bilden zwei Dreiecks-Seiten eine Körper Kante: $24 : 2 = 12$ Kanten.

2 Siehe Anhang Arbeitsblatt „Platonische Körper“

- Die Schülerinnen / Schüler versuchten Regelmäßigkeiten zu entdecken, diese zu formulieren und daraus Schlussfolgerung zu ziehen: Durch die Vorgabe des Tetraeders formulierte eine Schülergruppe: Die Flächenanzahl und Ecken-Anzahl ist gleich. Die Kantenanzahl ist immer größer als die Flächen und Ecken Anzahl. Dies führte zu Vermutungen, die an einfachen Beispielen widerlegt werden konnten.



2.2: Bau der Platonischen Körper mit Material:

Bastelbögen:

Eine sehr einfache Möglichkeit, Platonische Körper aus Papier zu erstellen, ist die Verwendung der im Anhang dargestellten Bastelbögen. Hier wird die Tätigkeit der Schüler aber zunächst auf das Ausschneiden, Falten und Kleben der Körper reduziert. Dies ist aber teilweise für SchülerInnen eine nicht zu unterschätzende Anforderung.
Man kann diese Bastelbögen aber auch als Ausgangspunkt zu weitergehenden Fragestellungen verstehen.

- Wie viele offene Kanten und wie viele Klebekanten hat das Netz?
- Hat jedes Netz des abgebildeten Körpers die gleiche Anzahl von Klebekanten?
- Kann man das Netz auch anders aufbauen?
- An welche Stelle des Netzes kann eine gekennzeichnete Fläche auch angefügt werden?
- ...

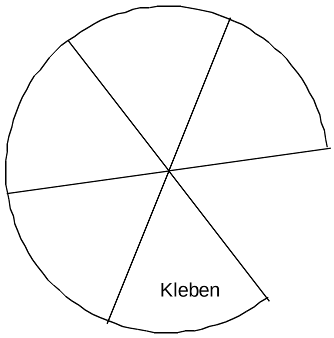
Die Bastelbögen werden auf farbiges Tonpapier kopiert (170 g / m^2), dann von den Schülern ausgeschnitten. Die Knickkanten müssen mit einem scharfen Messer eingeritzt werden. Die Schülerinnen und Schüler müssen eine Unterlage verwenden. Das Zusammenkleben erfolgt mit einem Flüssig Kleber. Ein Pritt Stift eignet sich als Klebstoff nicht.

Das Ecken und Kanten – Modell

Ausgangspunkt des Unterrichts war ein vom Lehrer erstellter Oktaeder. Er wurde zusammengeklebt aus kleinen Holzstäben (Schaschlik Spießen) und gefalteten Ecken. Mit den SchülerInnen wurde diskutiert, wie dieses Modell gefertigt wurde:

- Alle Holzstäbe für ein Modell müssen die gleiche Länge haben.
- Die Ecken wurden aus Pappkreisen gefertigt. Diese Pappkreise müssen eingeschnitten und die entsprechenden Winkel geknickt werden.
- Die Knickwinkel ergeben sich aus den Winkeln der verwendeten regelmäßigen Vielecke.

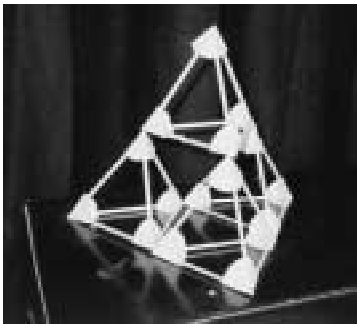
Beispielhaft wurde die Papp-Ecke für den Oktaeder besprochen. Das Oktaeder besitzt als Begrenzungsfläche gleichseitige Dreiecke. Alle Innenwinkel dieses Dreiecks sind gleich groß. Die Winkelsumme im Dreieck beträgt 180°. Ein Knickwinkel ist 60° groß. Beim Oktaeder stoßen in einer Ecke 4 Begrenzungsflächen zusammen. Es werden also 4 · 60° Winkel gefaltet. Ein fünfter 60° Winkel dient als Klebefläche.

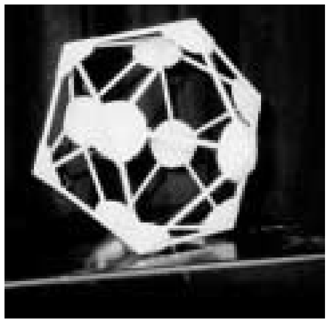


Da ein Oktaeder 6 Ecken besitzt, wurden sechs dieser Papp Ecken gefertigt. Normales DinA4 Papier reichte als Papierstärke für diese Ecken nicht aus. Wir haben Papier mit 170 g/m^2 verwendet. Die Ecken wurden mit normalen Papierkleber zusammengefügt.
Danach wurden mit einer Heiß – Klebe - Pistole die Holzstäbchen in die Ecken geklebt. Hierbei bewährte es sich, wenn mindestens zwei SchülerInnen zusammen arbeiteten.

Beim Zusammenbauen der anderen Platonischen Körper und der Konstruktion der Ecken wurden von den SchülerInnen entsprechende Überlegungen angestellt. Die Klasse arbeitete eine gute Doppelstunde in Schülergruppen von zwei bis drei Schülern.

Einige Arbeitsergebnisse:





Das Effektsystem!

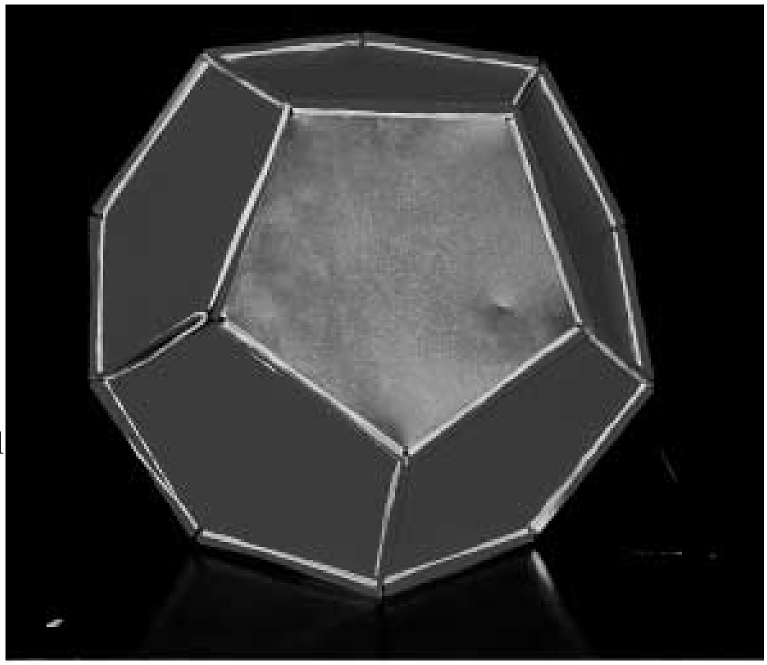
Die Idee des Effekt Systems ist recht alt. In einer Lehrerfortbildungsbroschüre der 70 Jahre habe ich diese Körper ein erstes Mal gesehen. Sie wurden dort „Gummiband Körper“ genannt.
Aus Pappe wurden regelmäßige N Ecke geschnitten. Sie erhielten einen Falt-Rand, der nach außen geknickt wurde. Um diese Ränder wurden Gummibänder gefügt.
Dieses System wurde von H.P. Maier wesentlich verbessert. Er benutzt als Körperflächen nicht mehr Pappe, sondern eine gut zu verarbeitende Kunststoff Folie. Diese kann nach Schablonen ausgeschnitten werden. Das Abknicken der Ecken wird mit einem Knickkeil aus Holz durchgeführt. In den Ecken muss

aber noch ein Loch gestanzt werden. Dies bereitet manchmal etwas Mühe. Die Körper lassen sich nach dem Herstellen der Seitenflächen schnell zusammen bauen. Aber auch hier ist Gruppenarbeit eine sinnvolle Arbeistform.

Besonders reizvoll ist das System, da mit dem durchsichtigen Kunststoff auch innenliegende Körper mit Holzstäben sichtbar gemacht werden können. Im oberen Bild wurde mit Holzstäben ein Würfel in das Dodekaeder eingefügt.

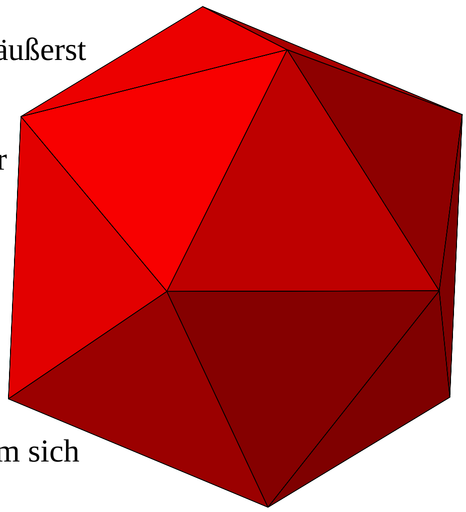
Mit diesem System können auch leicht archimedische Körper hergestellt werden. Je größer der Körper wird, desto schwieriger ist das Zusammenfügen der einzelnen Seitenteile. Die Schüler lernten schnell etwas über Stabilität. Sie machten die Erfahrung, dass einige Körper schon nach dem Zusammenfügen von einer Ecke stabil waren, manche Körper fast bis zum Einfügen der letzten Fläche labil blieben. Im Unterrichts-Gespräch wurden diese Erfahrungen systematisiert und geklärt.

Für mich war auch die Tatsache erstaunlich, mit welcher Sorgfalt die SchülerInnen mit dem bereitgestellten Material arbeiteten. Alle Körper, die die Schüler erstellten waren ansprechend und wurden genau ausgeführt. Lediglich mit einer Studenten Gruppe erlebte ich Schwierigkeiten. Sie brachten es nicht fertig, mit dem Material einen Dodekaeder zu erstellen. Die Flächen waren so ungenau gearbeitet, dass die Gummibänder immer wieder abrutschten.



Pappmodelle – Aufbau aus Netzen

Die Herstellung eines Körpers aus einem Netz ist eine äußerst schwierige Aufgabe. Das Netz eines Tetraeders, eines Würfels und auch eines Oktaeders läßt sich noch leicht herstellen. Aber das Netz eines Dodekaeders oder sogar eines Ikosaeders anzufertigen, ist eine komplexe und schwierige Angelegenheit. Man irrt sich leicht und die eigene Raumvorstellung stößt an Grenzen. Genauso schwierig ist es, einfache archimedische Körper mit Netzen aufzubauen.
Eine Voraussetzung für die Konstruktion des Netzes eines Oktaeders oder Dodekaeders ist die Existenz eines Modells. Man braucht diese Anschauungshilfe, um sich ein Netz vorstellen und zeichnen zu können.

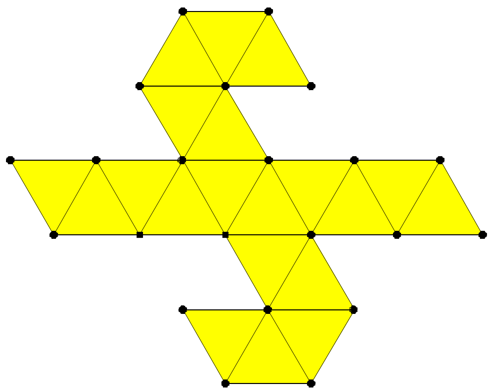


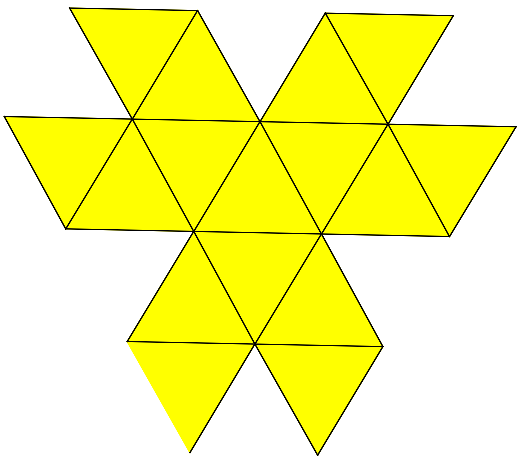
Einige Schülergruppen gingen so vor, dass sie sich den entsprechenden Körper mit den Frameworks Materialien aufgebaut haben. Diese Körper wurden dann geöffnet, so dass Netze entstanden. Danach wurde die entstandenen Netze auf Tonkarton konstruiert.

Die Schülerinnen und Schüler, die keine Modelle aus den anderen Materialien aufbauten, versuchten zunächst den Aufbau eines Ikosaeders aus Dreiecken zu beschreiben. Es entstanden folgende Beschreibungen des Körpers:

> „Ein Ikosaeder besteht aus einem Ring aus 10 Dreiecken. Dieser Ring besitzt einen Deckel und einen Boden aus jeweils 5 Dreiecken.“

Aus dieser Beschreibung ergab sich folgendes Netz:
Die oben gegebene Beschreibung ist in dem Netz wiedergegeben.





Wie schwer die Konstruktion eines Netzes ist, kann man aus der nebenstehenden Grafik erkennen. Hier fehlen noch einige Dreiecks - Flächen. Ergänzen Sie fehlende Dreiecks Flächen, so dass ein Netz des Ikosaeders entsteht.
Eine nächste Schwierigkeit war das Einzeichnen der Klebekanten. Betrachten wir hierbei das Netz eines Dodekaeders.

Wenn in dieses Netz Klebe - Kanten eingefügt werden sollen, so ist es zunächst einmal sinnvoll, die Anzahl der offenen Kanten zu zählen. In dem Netz eines Dodekaeders gibt es 38 offene Kanten. Klebt man den Körper zusammen, so stoßen immer in einer Körperkanten zwei Flächen zusammen. Es muss also 19 Klebe-Flächen geben. Diese Klebe-Flächen müssen nun aber richtig an die Flächen des Netzes verteilt werden. Besondere Schwierigkeiten bereiten die letzen Klebe-Flächen. Jeder Klebe Rand muss richtig der Fläche zugeordnet werden, mit der sie zusammen stößt.

Für einige Schülergruppen war dies zu schwierig. Sie entschieden sich dann für folgendes Vorgehen. Sie zeichneten zunächst bewusst zu viele Klebe Flächen ein, fügten den Körper dann probehalber zusammen und entfernten dann die zu viel eingezeichneten Klebe Kanten mit einer Schere.

Als Material wurde in diesem Fall auch ein stärkeres Papier in DinA3 Größe verwandt. Die Netze wurden mit Geodreieck und Zirkel traditionell konstruiert. Die Klebe Kanten wurden eingezeichnet und das Netz ausgeschnitten. Nun wurde mit einem Cutter alle Knick-Kanten nachgezogen, so dass sich die Knicke exakt herstellen ließen. Das Zusammenkleben des Körpers erfolgte mit einem flüssigen Papierkleber. Ein Klebestift eignete in diesem Fall nicht.

2.3: Definition und Eigenschaften von platonischen Körpern:

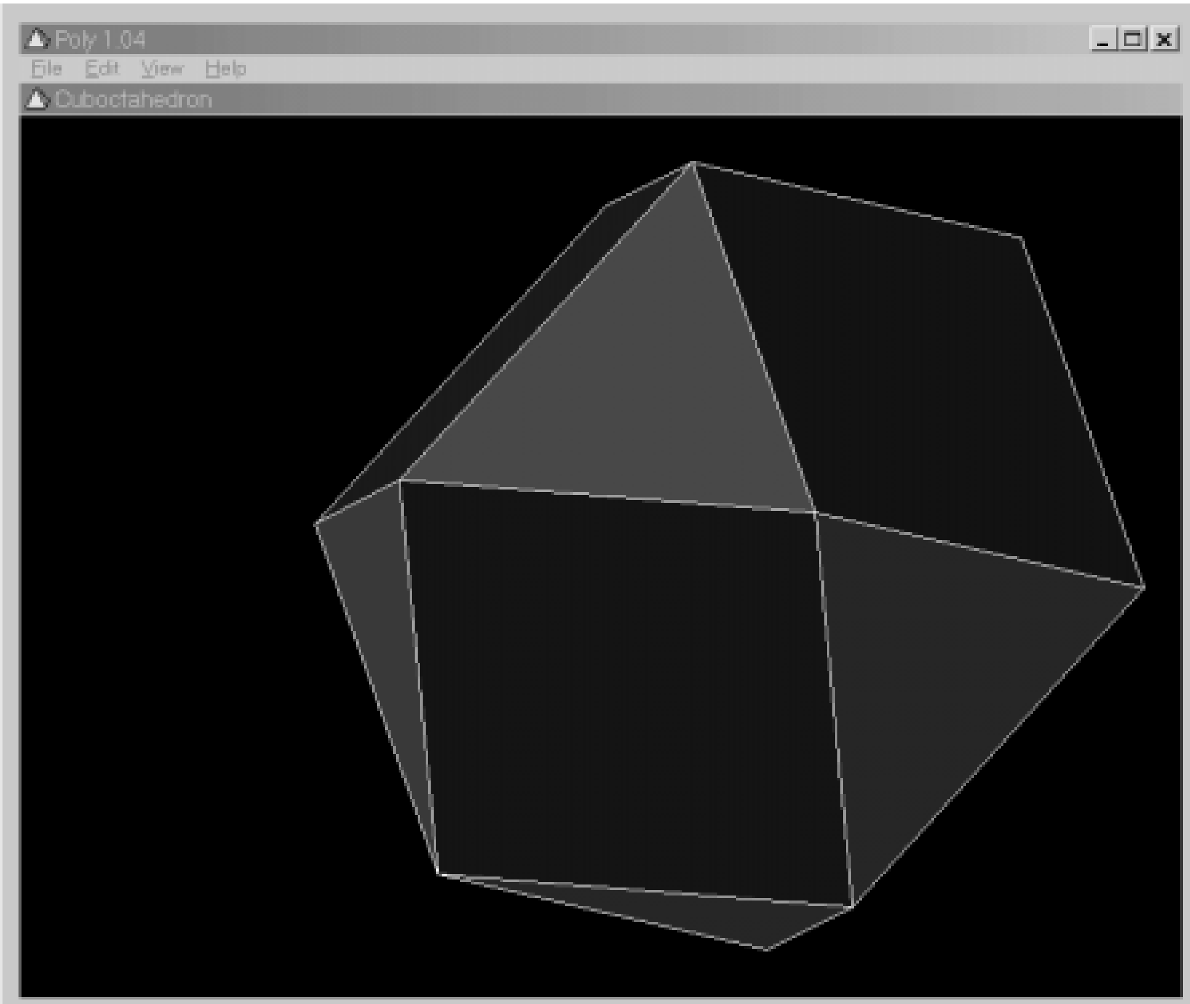
Nach diesen Phasen der Herstellung von platonischen Körpern, beschäftigten wir uns noch einmal mit einer Definition solcher Körper:

> Platonische Körper sind aus regelmäßigen Vielecken aufgebaut. In einem platonischen Körper sind alle Flächen und alle Ecken gleich.

Die Schüler waren sich lange Zeit uneinig, ob die Beschreibung nicht zu umfangreich ist. Einige Schüler meinten, die Aussage über die Ecken sei in dieser Definition überflüssig. Erst durch ein Gegenbeispiel konnten diese Schüler überzeugt werden.

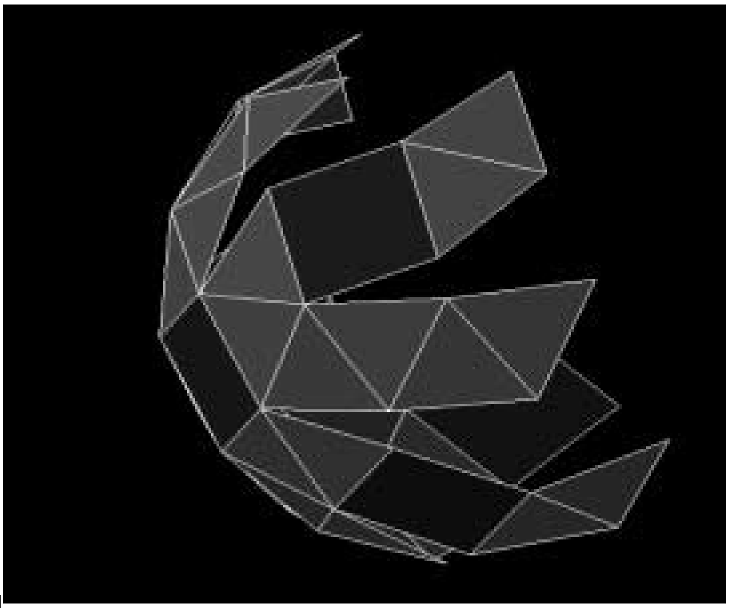
Mit dieser Definition war es für die SchülerInnen möglich, nun auch exakt einzelne platonische Körper zu beschreiben.

Danach wurde in der Lerngruppe das Programm Poly eingesetzt.



Alle platonischen und archimedischen, alle Johnson Körper und Catalanischen Körper kann man mit diesem Programm betrachten. Die dreidimensionale Darstellung der Körper läßt sich drehen und auch zu einem Netz aufklappen.

Die Vielzahl der archimedischen Körper ist mit einem solchen Programm leicht überschaubar. Jeder Körper konnte schnell als Netz dargestellt werden. Das Aufklappen zum Netz gestaltete sich dynamisch.



Gemeinsam beschäftigte sich die Lerngruppe dann mit einer Definition der archimedischen Körper. Wir einigten uns auf folgende Definition:

> Archimedische Körper bestehen aus regelmäßigen Vielecken. Im Gegensatz zu den platonischen Körpern können in einem archimedischen Körper auch unterschiedliche Flächenarten vorkommen. Alle Ecken sind gleich.
> Dadurch kann ein archimedischer Körper durch die Definition einer Ecke beschrieben werden.

Auffällig wurde durch die Arbeit mit dem Programm Poly, dass es nur eine begrenzte Anzahl an platonischen und archimedischen Körpern gibt. Die Anzahl und die Eigenschaften der platonischen Körper waren den Schülern bekannt. So konnten sich zwei Schülergruppen damit beschäftigen, nachzuweisen, dass es nur endlich viele platonische Körper gibt.
Drei andere Schülergruppen beschäftigten sich mit dem Bau eines beliebigen archimedischen Körpers mit einem der oben beschriebenen Verfahren.

Arbeitsergebnis Gruppe I und II:

> Warum gibt es nur endlich viele platonische Körper? (Tetraeder, Oktaeder, Würfel, Dodekaeder, Ikosaeder)

- Eine Ecke eines Körpers wird durch mindestens 3 Flächen gebildet.
- Gleichseitiges Dreieck: Stoßen 3 gleichseitige Dreiecke in einer Ecke zusammen, so ergibt sich ein Tetraeder; 4 gleichseitige Dreiecke ergeben ein Oktaeder, 5 gleichseitige Dreiecke ein Ikosaeder und 6 gleichseitige Dreiecke ergeben eine Fläche.
- Quadrat: Stoßen drei Quadrate in einer Ecke zusammen, so ergibt sich ein Würfel. Vier Quadrate ergeben eine Fläche.
- Regelmäßiges Fünfeck: Drei regelmäßige Fünfecke in einer Ecke ergeben das Dodekaeder. Vier Fünfecke lassen sich nicht zur Körperecke zusammenfügen
- Regelmäßiges Sechseck: Drei regelmäßige Sechsecke liegen in der Fläche. Es entsteht keine Körperecke.
- Regelmäßige 7, 8, 9, ...n Ecke: Es lassen sich nicht drei Flächen zu einer Ecke zusammenfügen, da die Winkelsumme größer als 360° ist.

2.4: Zeichnen von platonischen Körpern:

Das räumliche Zeichnen von Körpern ist für SchülerInnen und auch für viele Erwachsene eine ausgesprochen anspruchsvolle Aufgabe. Schüler lernen in der Regel in der Schule nur die Schrägbild Perspektive. Selten wird auch die isometrische Darstellung von Körpern behandelt. Die „Zwei Tafel Projektion“ oder die „Drei Tafel Projektion“ ist nur sehr selten in der schulischen Realität anzutreffen. Alle diese Darstellungsverfahren werden darüber hinaus auch nur mit Quadern oder Würfeln durchgeführt. Die Schwierigkeit des Auftrags, einen Tetraeder zu zeichnen, läßt sich erahnen, wenn man selbst eine Freihand Zeichnung versucht.

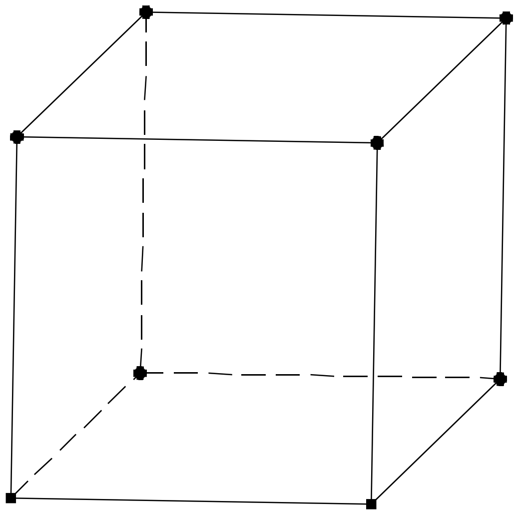
Ausgehend von der Zeichnung eines Würfels erlernten die SchülerInnen das Zeichnen der platonischen Körper. Zunächst wurden die Eigenschaften der Schrägbild Zeichnung wiederholt, die die SchülerInnen in der 5. und 6. Klasse kennen gelernt hatten. Das dargestellte Verfahren des Zeichnens der Platonischen Körper läßt sich auch mit der isometrischen Darstellung des Würfels durchführen.

Eigenschaften der Schrägbild Zeichnung:

- *Beim Zeichnen von rechtwinklig begrenzten Körpern treten bei der Schrägbild Zeichnung nur drei Richtungen auf: Horizontal, vertikal und in Richtung der ersten Winkelhalbierenden des Koordinatensystems.*
- *Alle horizontalen und vertikalen Strecken werden im Abbildungsmaßstab gezeichnet.*
- *Alle Längen in Richtung der ersten Winkelhalbierenden werden um die Hälfte verkürzt gezeichnet.*

Mit diesen Eigenschaften lassen sich leicht Quader und Würfel zeichnen. Die Zeichnung eines Würfels ist der Ausgangspunkt der Zeichnung eines Tetraeders.

Aus diesem Würfel läßt sich ein Tetraeder zeichnen. Alle Kanten des Tetraeders sind Flächendiagonalen. Ausgehend von einer Ecke werden drei miteinander verbundene Flächendiagonalen eingezeichnet. Dabei wird eine Würfelecke vollständig abgeschnitten.

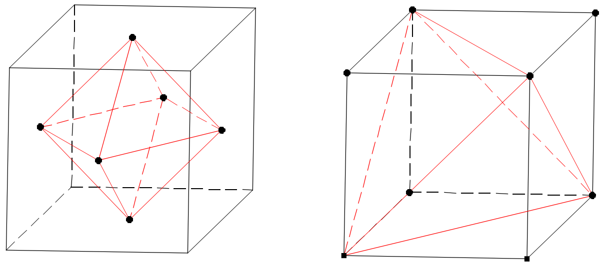


In einem Tetraeder stoßen aber drei Kanten zusammen. Also muss von der ersten Ecke ausgehend eine weitere Flächendiagonale gezeichnet werden. Diese verbindet man über zwei weitere Flächendiagonalen noch mit den beiden anderen Ecken und erhält das fertige Bild eines Tetraeders.

Versuchen sie, in dem dargestellten Würfel ein Tetraeder zu skizzieren.

Das Zeichnen des Oktaeders ist ausgehend von der Würfeldarstellung leicht möglich. Um die Eckpunkte des Oktaeders zu erhalten, verbindet man die Flächenmittelpunkte in geeigneter Weise miteinander. Der Würfel hat sechs Flächen. Daher ergeben sich auch sechs Flächenmittelpunkte. Dies sind die sechs Ecken des Oktaeders.

Diese beiden platonischen Körper konnten alle SchülerInnen auf unlinierten Papier sorgfältig zeichnen.

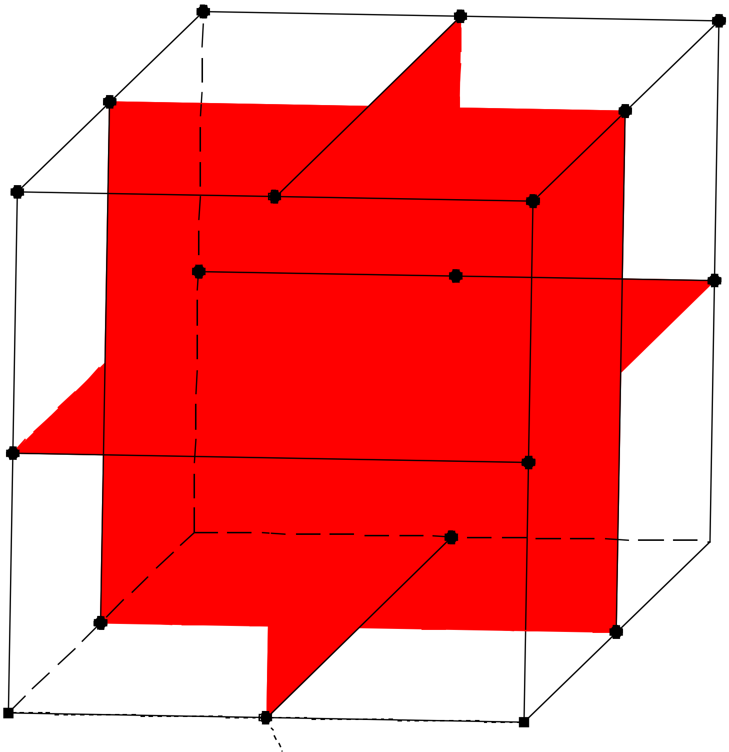


Für die Zeichnung eines Dodekaeders oder auch eines Ikosaeders muss man etwas über das Verhältnis des goldenen Schnitts wissen. Die Erarbeitung dieses Themen Gebietes ist in einer 8. Klasse nicht möglich. Ich habe daher die Problematik nicht angesprochen, sondern nur über die Nennung von Prozentwerten das Teilungsverhältnis genannt.

Zeichnung eines Ikosaeders:

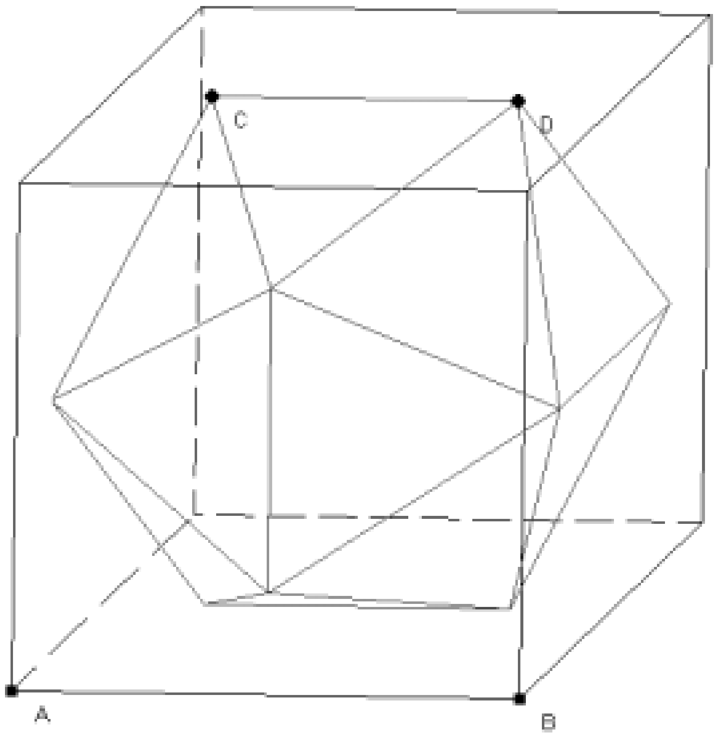
Ausgehend vom Würfel werden alle parallele Kanten eines Würfels halbiert. Man erhält vier Eckpunkte. Diese Eckpunkte bilden ein Quadrat. Mit allen 12 Kanten wird so verfahren. Man erhält drei Quadrate, die sich im Würfelmittelpunkt schneiden.

Auf den Kanten dieses drei Quadrate liegen die Eckpunkte des Ikosaeders.



Beim eingeschriebenen Ikosaeder ist die Kante CD Major der im Goldenen Schnitt geteilten Würfelkante AB.

In einer 8. Klasse ist die Behandlung des Goldenen Schnitts als Unterrichtsthema nicht ohne weiteres möglich. Ich habe daher das Längenverhältnis der Kante CD zur Kante AB als prozentuales Verhältnis angegeben.



$$\overline{CD} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\overline{AB}$$

$$\overline{CD} = 0,6180 \cdot \overline{AB}$$

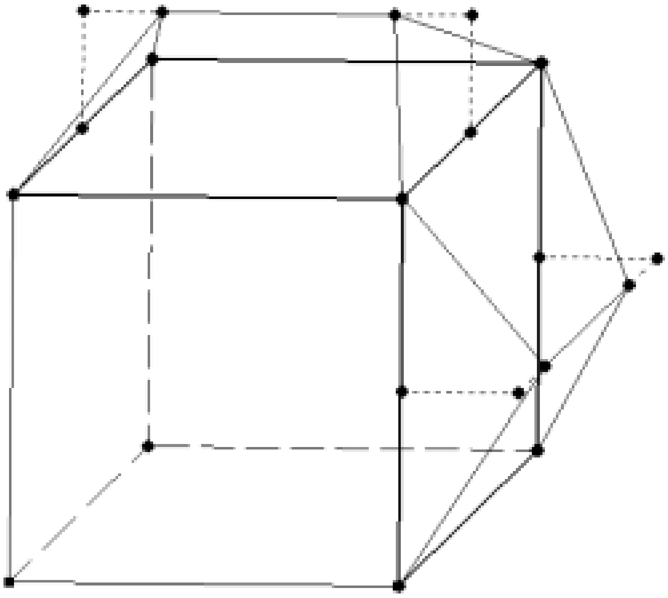
Wir haben großzügig gerundet und haben mit 60 Prozent gezeichnet.

Beim Zeichnen des eingeschriebenen Ikosaeders sollten man die unsichtbaren Kanten des platonischen Körpers nicht mitzeichnen. Dies ist sehr kompliziert und die Zeichnung wird sehr unübersichtlich, da viele Kanten fast aufeinander liegen.

Zeichnen des Dodekaeders:

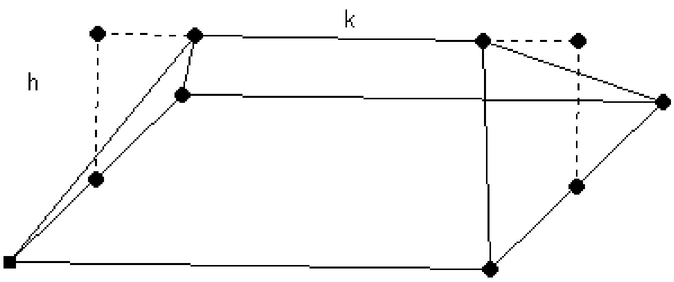
Eine Schülergruppe hatte in den Bauphasen mit dem Effekt System aus durchscheinendem Kunststoff einen Dodekaeder gebaut. In dieses Modell habe ich einen Holzstab hineingebracht. Dieser Stab bildete eine Flächendiagonale in einem der regelmäßigen Fünfecke. Die Schülergruppe, die den Dodekaeder erstellt hatte, bekam den Auftrag, weitere solche Diagonalen hineinzustecken oder einzuzeichnen, so dass im Inneren des Dodekaeders ein Würfel sichtbar wird. Dieser Auftrag war nach kurzer Zeit ausgeführt.

Dies führte uns zu der Vermutung, dass ein Dodekaeder aus einem Würfel mit sechs aufgebrachten Walmdächern entstehen kann. Dabei müssen die Walmdächer so berechnet werden, dass die Dodekaeder Kanten geradlinig verlaufen.



Auch hier spielen wieder die Verhältnisse des Goldenen Schnitts eine Rolle. Ich habe diese Verhältnisse auch wieder als gerundete Prozentwerte gegeben. Die folgende Zeichnung gibt Aufschluss:

Die Höhe h des Walmdaches beträgt 30 Prozent der Würfel Strecke AB.
Die Kante k ist eine Kante des regelmäßigen Fünfecks und ist 60 Prozent der Strecke AB.

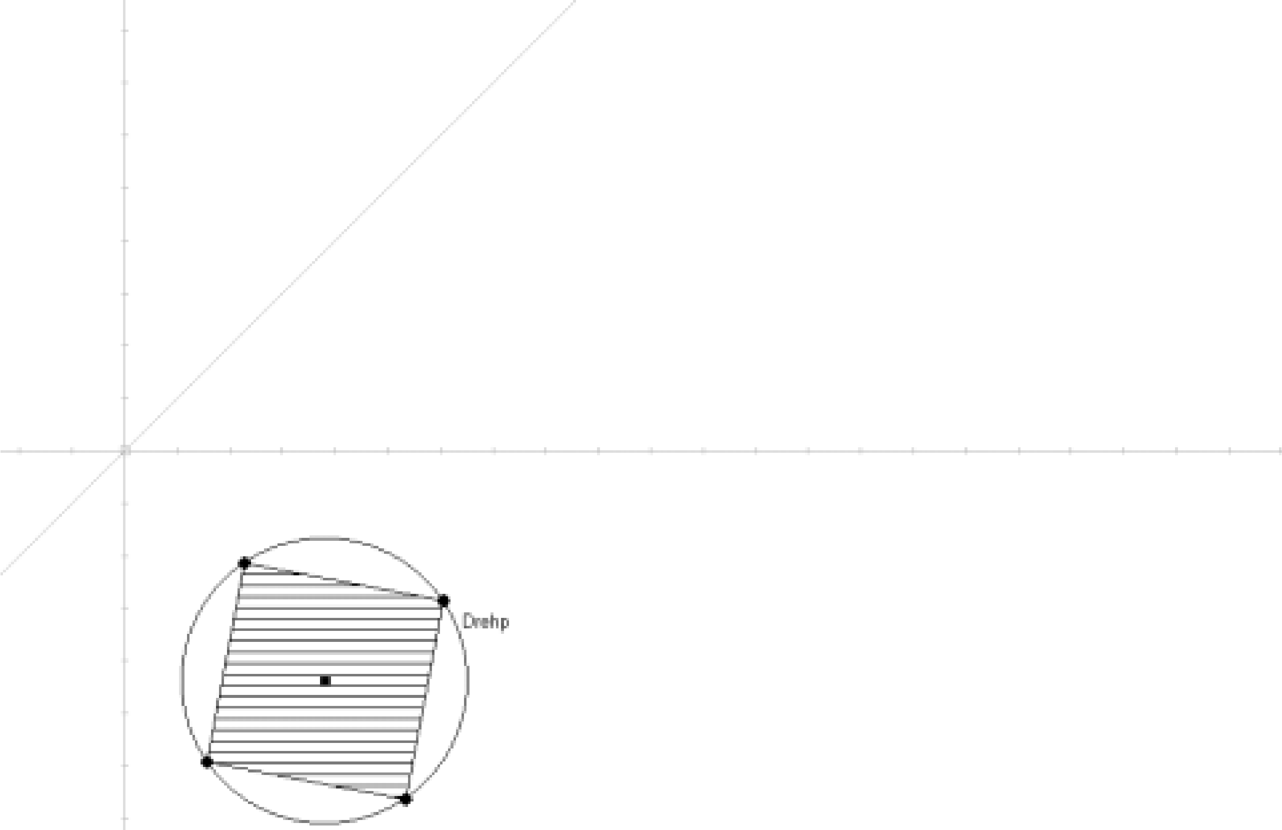


Das Zeichnen eines solchen Dodekaeders war für viele SchülerInnen sehr schwierig.
Wichtig war es wieder, die nicht sichtbaren Kanten wegzulassen. Einige SchülerInnen brauchten Hilfen, die aber auch von Experten aus der Schülergruppe gegeben werden konnte.

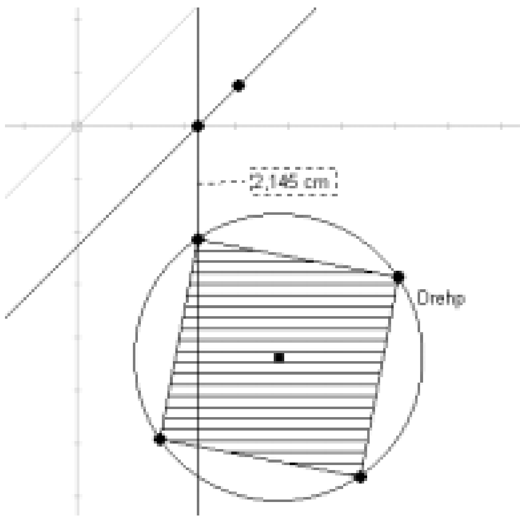
2.5: Konstruktionen mit einer dynamischen Geometrie Software:

Mit Hilfe der dynamischen Geometrie Software „Euklid DynaGeo“ ist das Konstruieren eines platonischen Körpers aus einem Würfel teilweise einfacher, als auf einem Blatt Papier. Wir sind von einer Schrägbild-Konstruktion eines Würfels ausgegangen, das sich drehen läßt. Diese Konstruktion benutzt die oben beschriebenen Eigenschaften eines Schrägbildes.

Zunächst wird in dem Geometrie Programm das Koordinatenkreuz sichtbar gemacht und die erste Winkelhalbierende eingezeichnet. Im zweiten Quadranten erzeugt man einen Kreis mit einem eingeschriebenen Quadrat, das durch die Bewegung eines Punktes gedreht werden kann. Wichtig ist, dass der Punkt auf dem Kreisbogen, der den Kreis definiert, kein Eckpunkt des Quadrats ist. Sonst wird man beim Drehen auch immer den Kreisradius ändern.

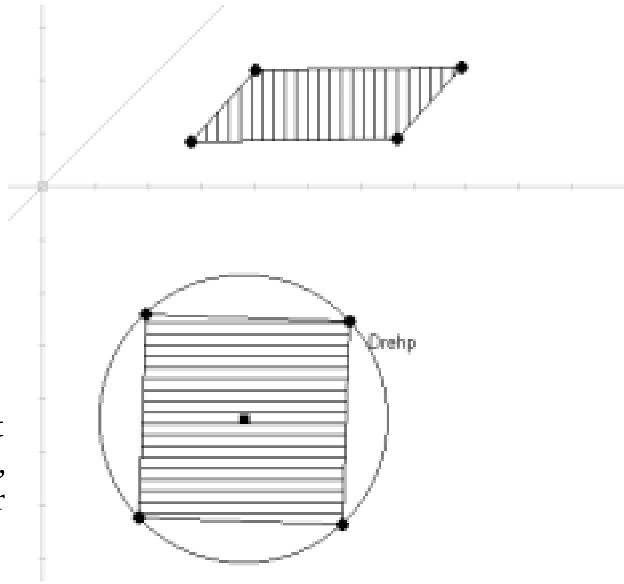


Dieses Quadrat ist der Grundriss eines Würfels, der im ersten Quadranten erzeugt werden soll. Man fällt nun von einem Punkt des Quadrats aus das Lot auf die x Achse. Im Schnittpunkt mit der x Achse erzeugt man eine Parallele zur 1. Winkelhalbierenden. Der Abstand zwischen Quadratpunkt und x Achse wird gemessen, halbiert und auf die Parallele zur Winkelhalbierenden übertragen. Man erhält den ersten Bildpunkt.
Natürlich ist diese Konstruktion dynamisch. Das bedeutet, dass sich die Abstände bei der Bewegung durch das Quadrat mit verändern.
Alle Konstruktionselemente werden nun versteckt.
Nur noch der Bildpunkt bleibt sichtbar.
Man erstelle sich ein Makro, das aus dem Ausgangspunkt, der x Achse und der Winkelhalbierenden den Bildpunkt erstellt.
Hiermit lassen sich dann leicht alle 4 Bildpunkte konstruieren.



Alle vier Bildpunkte der Grundfläche wurden erzeugt. Die Höhe des Würfels entspricht der Kantenlänge der Grundfläche. In jedem Bildpunkt errichte man eine Lotgerade zur x Achse und erzeuge eine obere Würfelecke im Abstand der Kantenlänge des Ausgangs-Quadrats. Nun müssen nur noch die Eckpunkte des Würfels durch Strecken verbunden werden. Dieser Würfel läßt sich drehen und seine Abmessungen durch die Veränderung des Kreises verändern.

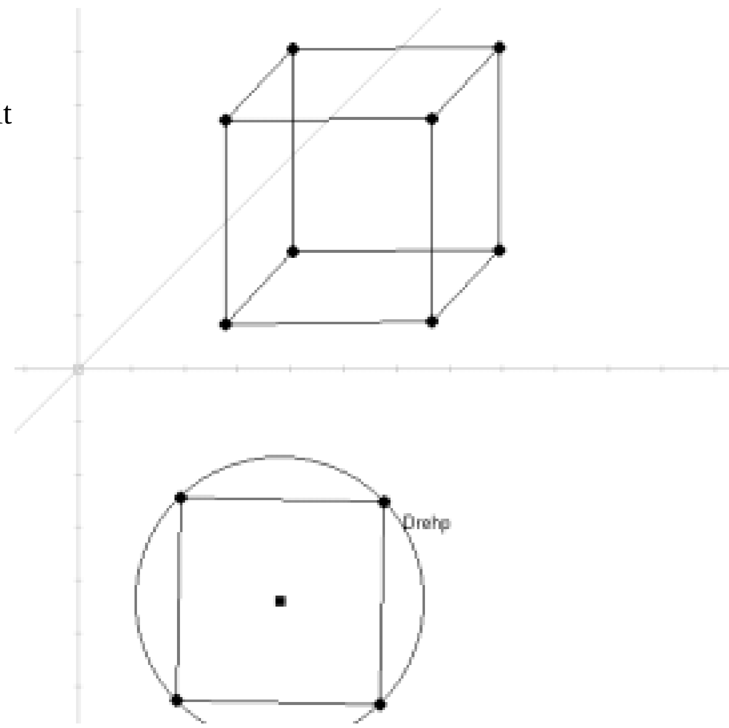
Eine solche dynamische Schrägbild-Konstruktion ist Internet unter der Adresse http//:www.erz.uni-hannover.de/idmi/koepsell/start.html zu betrachten. Allerdings kann man diese dynamischen Zeichnungen nur mit dem Internet Explorer betrachten, da der Netscape Communicator die benötigten Browser Eigenschaften nicht unterstützt.

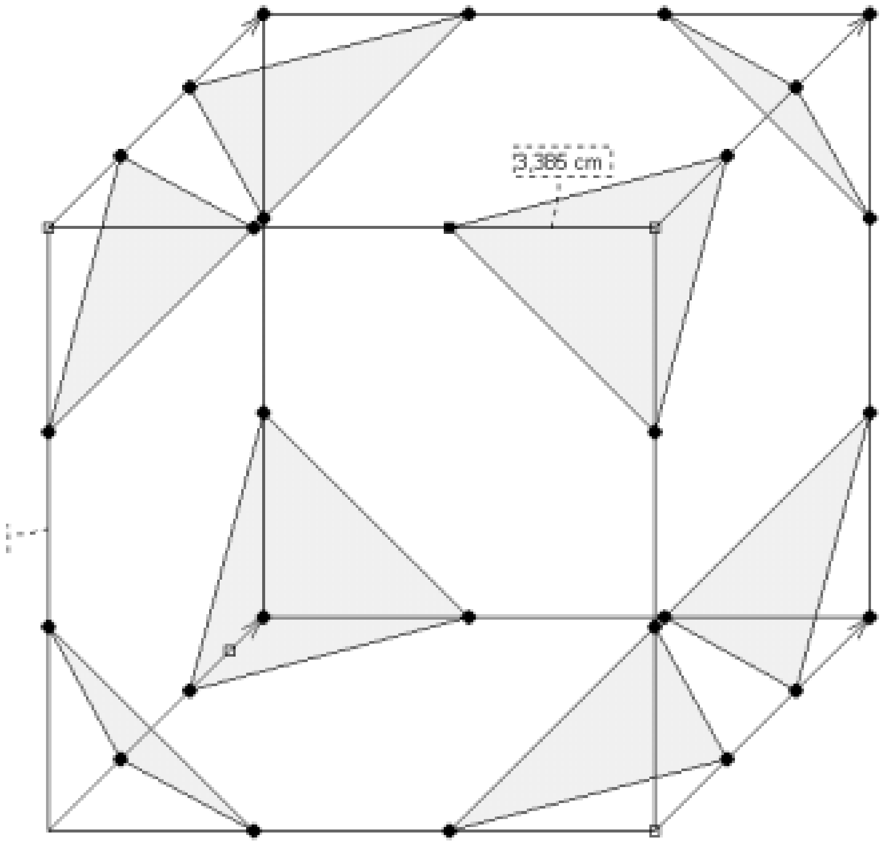


Diese Figur kann nun leicht Ausgangspunkt der Konstruktionen für Tetraeder, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder sein. Da sich der Würfelkörper drehen läßt, kann man die Seite, an der konstruiert wird, nach vorne bringen.

Mit der gleichen Ausgangsfigur lassen sich auch Schnittkörper erstellen. Man kann leicht von einem Würfel eine Ecke abschneiden. Schneidet man alle acht Ecken gleichzeitig ab und wählt eine passende Schnittweite, so kann ein archimedischer Körper entstehen.

Auch dieser Schnittkörper kann dynamisch gestaltet werden. In Abhängigkeit von einem Schnittpunkt werden die anderen mit bewegt.





3. Die archimedischen Körper:

3.1 Definition und Eigenschaften von archimedischen Körpern

Mit dem oben beschriebenen Materialien konnten von den Schülerinnen und Schülern archimedische Körper erstellt werden. Dabei wurde den Schülern die Bauanleitung für eine Ecke vorgegeben:

> Baue einen Körper, dessen Ecke aus zwei regelmäßigen Achtecken und einem gleichseitigen Dreieck besteht. Alle Ecken sind gleich. Beschreibe den Körper und zeichne sein Netz.

> Baue einen Körper, dessen Ecken aus zwei regelmäßigen Sechsecken und einem gleichseitigen Dreieck besteht. Alle Ecken sind gleich. Beschreibe den Körper und zeichne sein Netz.

Natürlich wurden nur einige archimedische Körper erstellt. Die Vielzahl dieser Körper konnte wiederum mit dem Programm „Poly“ betrachtet werden.

In Anlehnung an die Definition der platonischen Körper wurden die archimedischen Körper wie folgt definiert:

> Archimedische Körper sind aus regelmäßigen N Ecken aufgebaut. In einem archimedischen Körper können unterschiedliche Flächenformen vorkommen. Jede Ecke eines archimedischen Körpers ist gleich.

4. Flächenberechnungen:

Die hier beschriebene Lernsituation wurde im Rahmen einer „normalen“ Unterrichtseinheit Flächenberechnung in einer 8. Klasse einer Integrierten Gesamtschule durchgeführt. Alle bisherigen Aktivitäten gehörten nicht im eigentlichen Sinne zu dem im Hause üblichen Unterrichtsgang. Es war klar, das wir uns irgendwann auch mit der Berechnung von Flächen beschäftigen mussten.

Die gebauten und besprochenen Körper waren alle durch Flächen begrenzt. Bei der Erstellung von Netzen hatten wir diese Flächen konstruiert. Es liegt also auch nahe, sich mit der Berechnung ihrer Fläche zu beschäftigen.

4.1 Flächenmaße

Ausgangspunkt jeder Flächenberechnung ist die Beschäftigung mit Flächenmaßen. Dies wurde ausführlich in der 6. Klasse durchgeführt. Dabei braucht man zunächst nicht von den normierten Flächenmaßen auszugehen. Regelmäßige und unregelmäßige Flächen können mit beliebiger Raster – Folie überdeckt werden und das Auszählen ermöglicht einen Flächenvergleich.

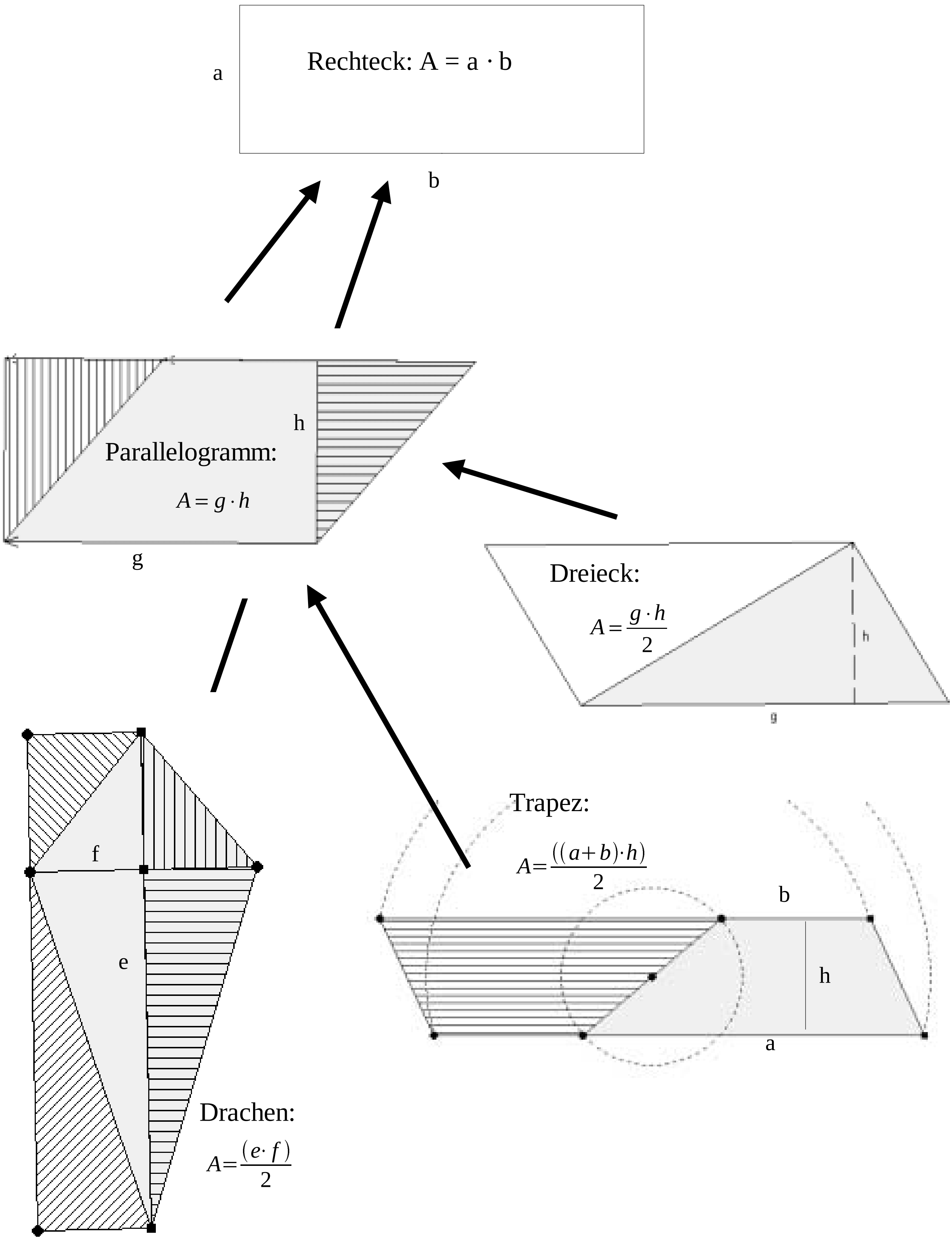
Die Flächenmaße bewirken eine Normierung. Wer sie nicht zeichnen kann, hat die Flächenberechnung in Wirklichkeit nicht verstanden und kann die Maße auch nicht ineinander umrechnen.

4.2 Flächenberechnung und Flächen- Berechnungs - Formeln

Das Auslegen einer Fläche mit Normflächen im Original oder in der maßstabsgetreuen Abbildung ist das ursprüngliche, der Flächenberechnung zu Grunde liegende Messprinzip. Die Tatsache, dass Flächenmaße quadratisch sind, bedingt, dass Rechtecke durch die Multiplikation von Länge und Breite berechnet werden können. Damit wird das Rechteck zur Grundform der Flächenberechnung: Kann eine Fläche in ein Rechteck verwandelt werden, so kann auch eine Flächenberechnungsformel aufgestellt werden. Dies wurde mit wenigen Figuren gemeinsam bearbeitet. Danach wurde das Prinzip von Schülerinnen und Schülern selbständig angewandt.

Ein in der Klasse aufgehängtes und erarbeitetes Plakat war eine Merkhilfe.

Flächenberechnung:

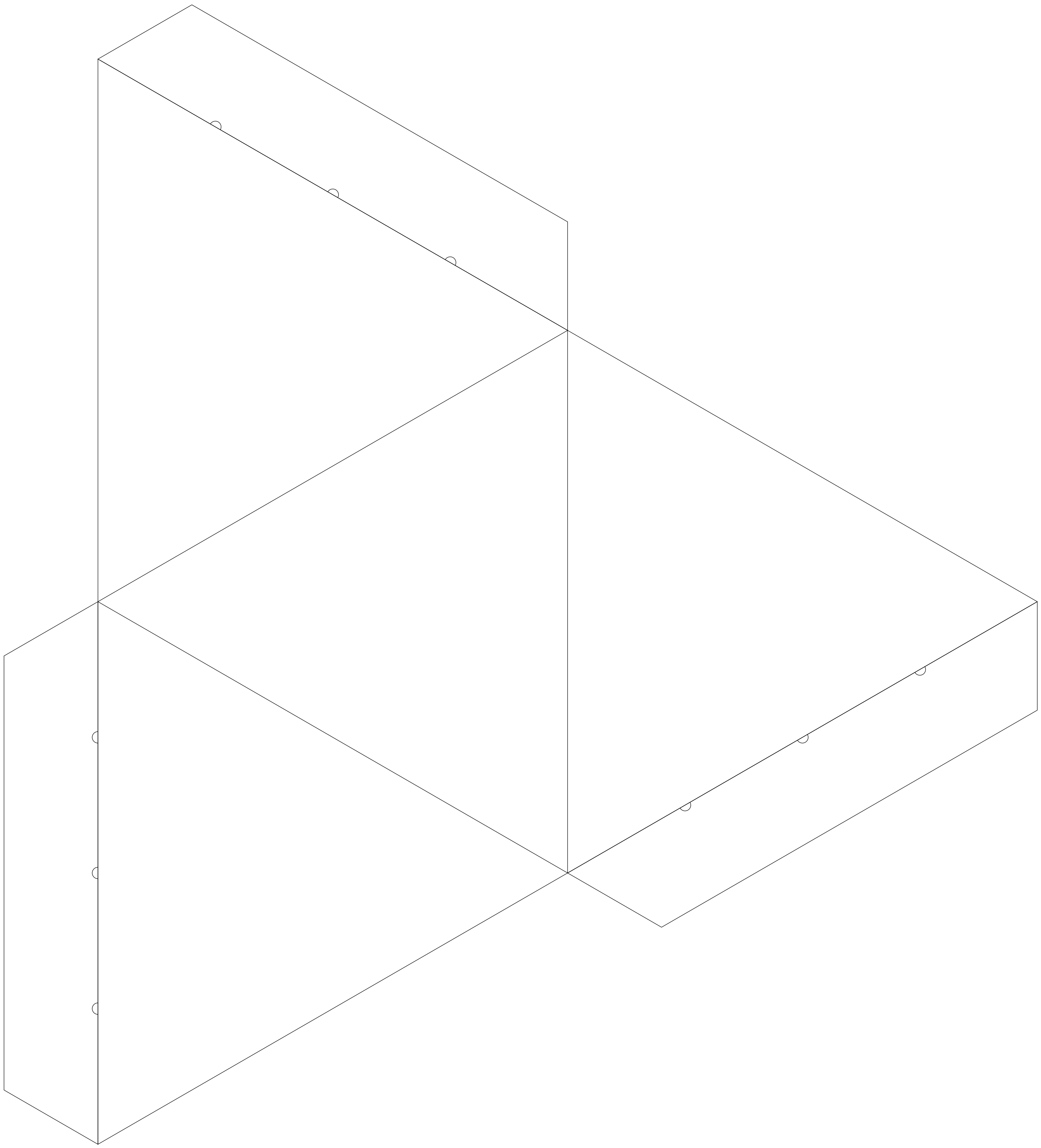


4.3 Die Höhe:

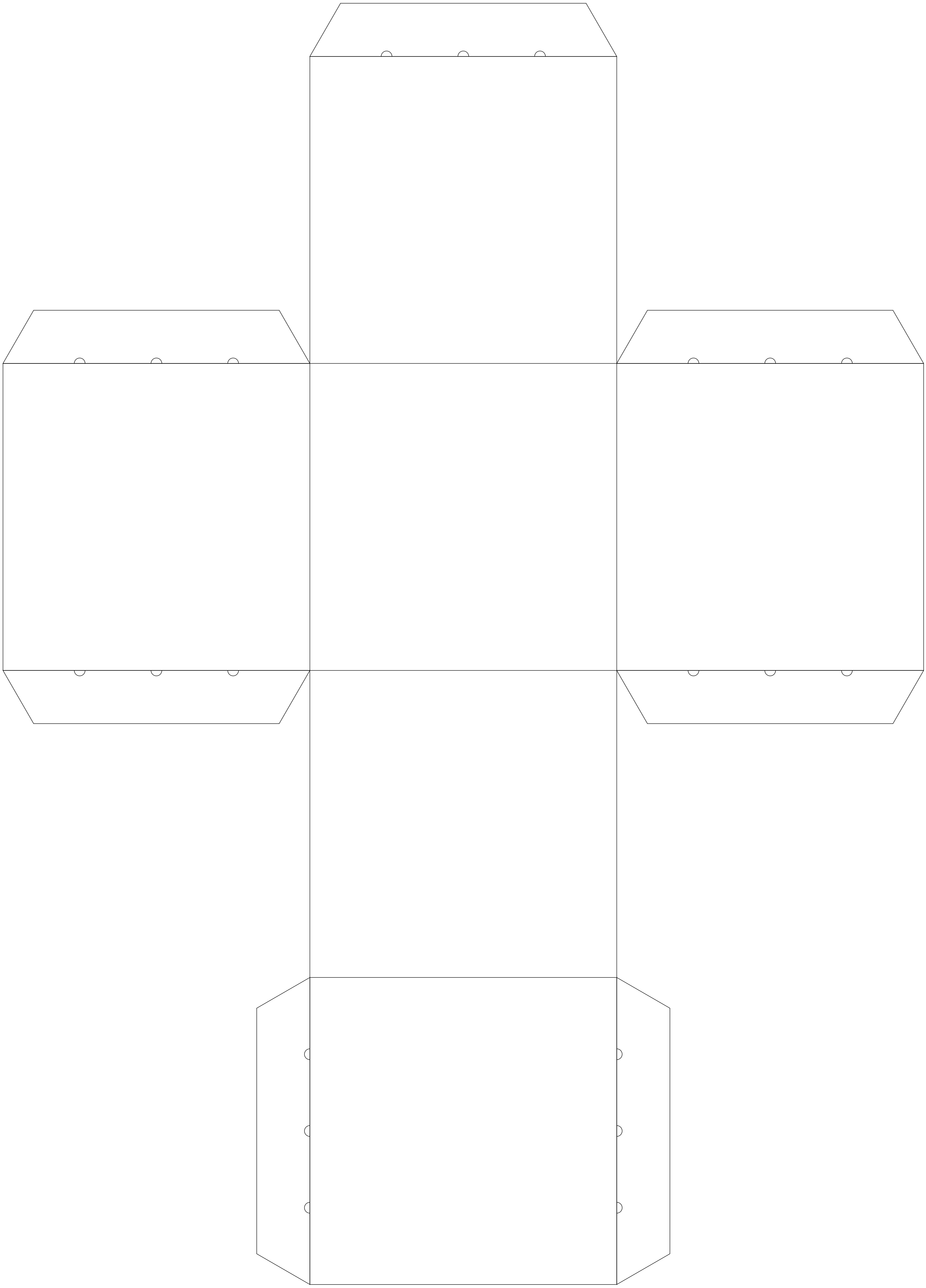
Ein für Schüler schwieriger Begriff ist die Höhe in geometrischen Figuren und Körpern. Die Schwierigkeiten, die mit diesem Begriff verbunden sind werden immer wieder unterschätzt. Umgangssprachlich existiert für die Schüler der Begriff der Höhe. Dieser Begriff wird aber verbunden mit einer senkrechten Länge zur Horizontalen. So wird eine Höhe im Dreieck schnell gefunden, die senkrecht auf einer waagerecht liegenden Grundseite steht. Die drei anderen Höhen werden von der Begrifflichkeit oft nicht erkannt, insbesondere dann, wenn die Höhe noch außerhalb der geometrischen Figur liegt. Es reicht nicht, eine Konstruktions Vorschrift zu kennen.

5. Vielfältige Tätigkeiten

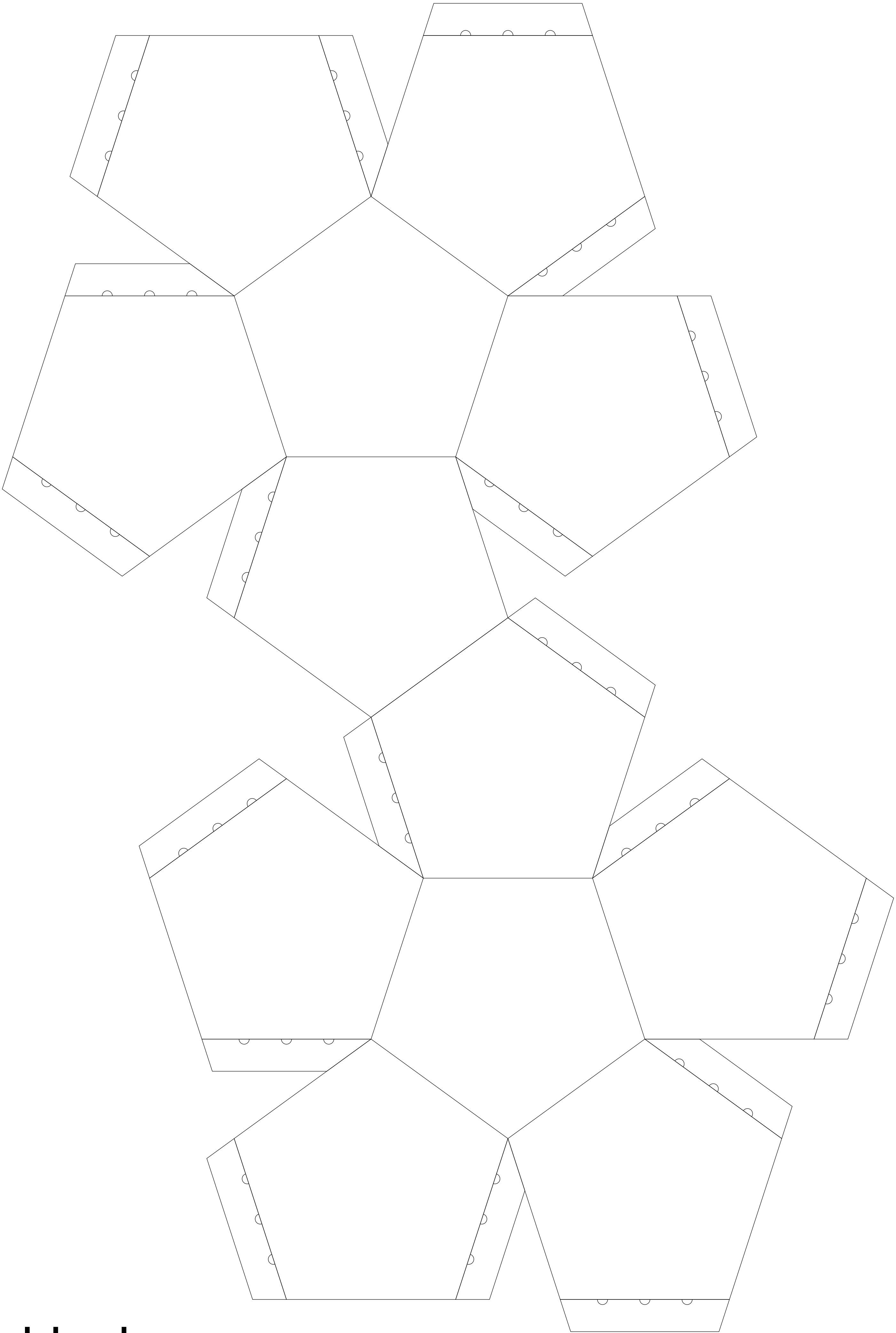
Die Unterrichtssituation verknüpft verschiedene Tätigkeiten, die zur „traditionellen“ Geometrie gehören mit Tätigkeiten, die der Schulung der Raumvorstellung dienen. Allein ein Blick auf die im Anhang zu findenden Arbeitsblätter zeigt die Vielschichtigkeit der Anforderungen und geforderten Tätigkeiten.
In den Zeiten der Lernziel Orientierung konnte man eine starke Sequentierung der Mathematik in sogenannte Unterrichtseinheiten beobachten. Hier war von der oben beschriebenen Vielschichtigkeit kaum etwas zu spüren. Eine solche Unterrichtseinheit im 8 Jahrgang war die UE „Flächenberechnung“. Hier wurden Formeln entwicklet, mit Formeln gearbeitet und gerechnet und Flächenmaße ineinander verwandelt.
Da folgende Schaubild zeigt die unterschiedlichen Anforderungen in dem hier vorgestelltem Lehrangebot.



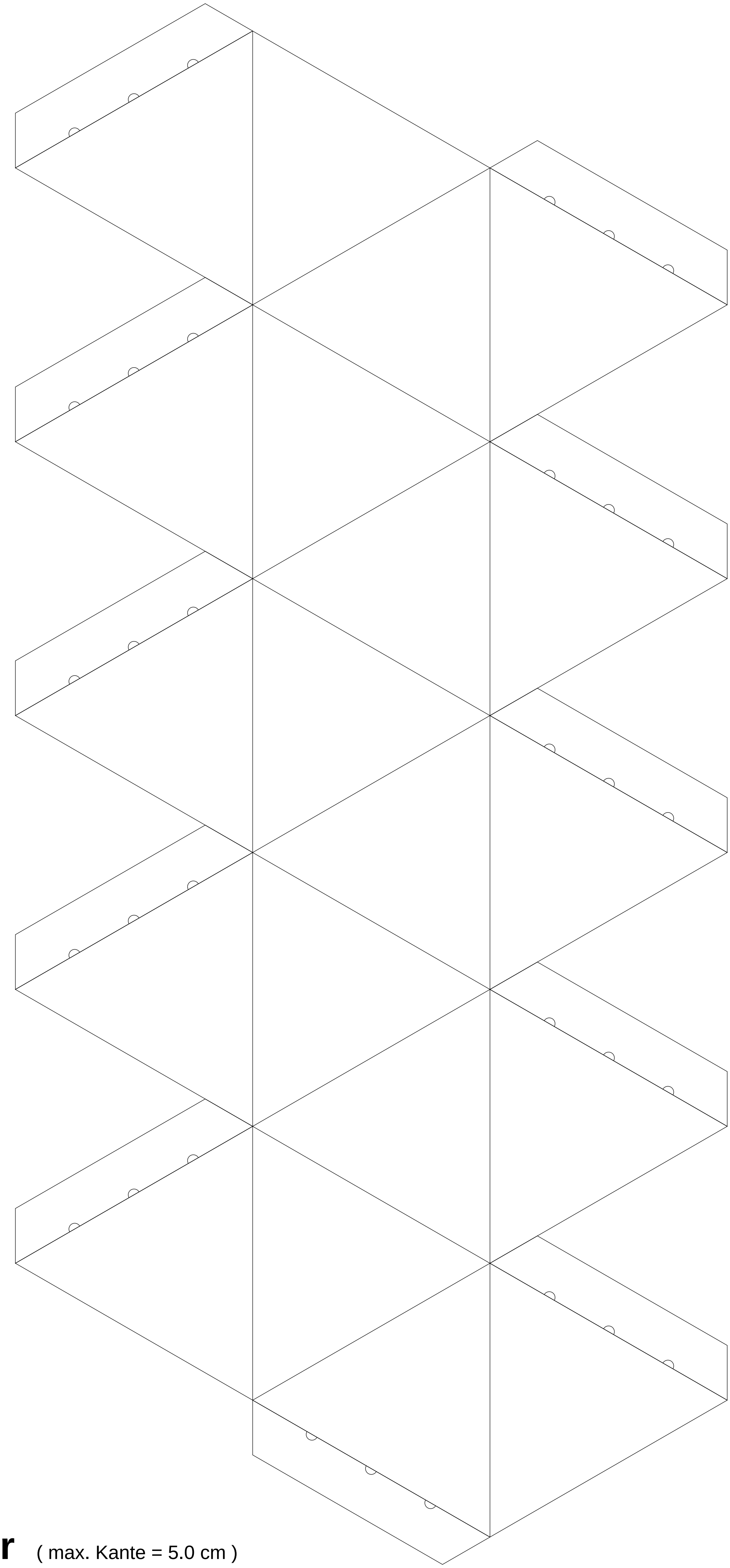
Tetraeder (max. Kante = 10.5 cm)



Hexaeder (max. Kante = 6.6 cm)



Dodekaeder (max. Kante = 3.5 cm)

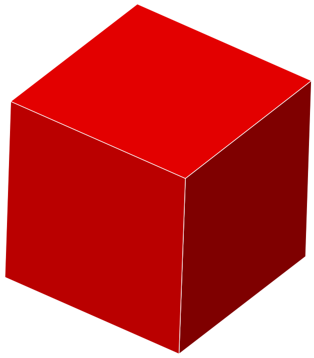


Ikosaeder (max. Kante = 5.0 cm)

Die platonischen Körper

Platonische Körper

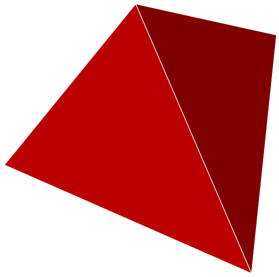
- bestehen aus regelmäßigen Vielecken!
- Alle Flächen eines Körpers sind gleich!
- Jede Ecke eines Körpers ist gleich!



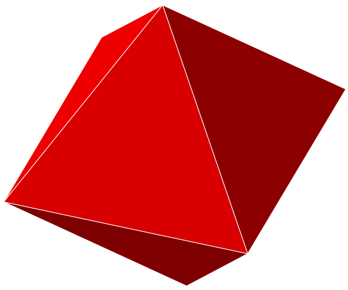
Einer der bekanntesten der platonischen Körper ist der Würfel. Alle oben beschriebenen Eigenschaften sind dort erfüllt. Das Quadrat ist ein regelmäßiges Vieleck, alle Flächen sind gleich und ... .

Es gibt drei platonische Körper, die aus gleichseitigen Dreiecken bestehen:

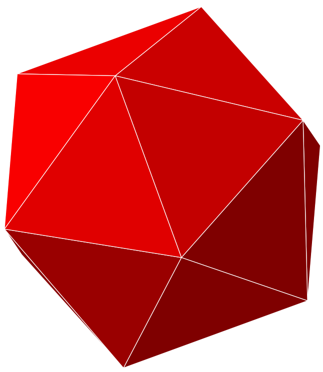
Das Tetraeder:



Das Oktaeder:

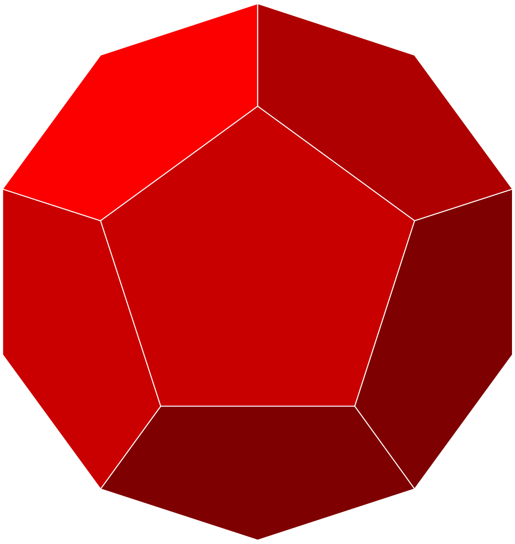


Das Ikosaeder:



Andreas Koepsell, Charlottenstr. 11, 30449 Hannover

Dodekaeder:

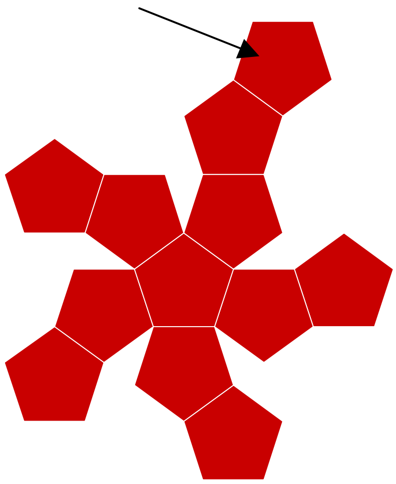


<u>Aufgabe 1:</u>
Mit Hilfe von Flächen, Kanten und Ecken können alle diese Körper beschrieben werden. Versuche es!

Körper	Flächen	Ecken	Kanten
Tetraeder	4	4	6
Würfel	6		
Oktaeder	8		
Dodekaeder	12		
Ikosaeder	20		

<u>Aufgabe 2:</u>
Konstruiere das Netz eines Tetraeders und eines Oktaeders. Die regelmäßigen Dreiecke haben eine Kantenlänge von 5 cm.
Zusatz: Wie viel verschiedene Oktaedernetze kannst du skizzieren?

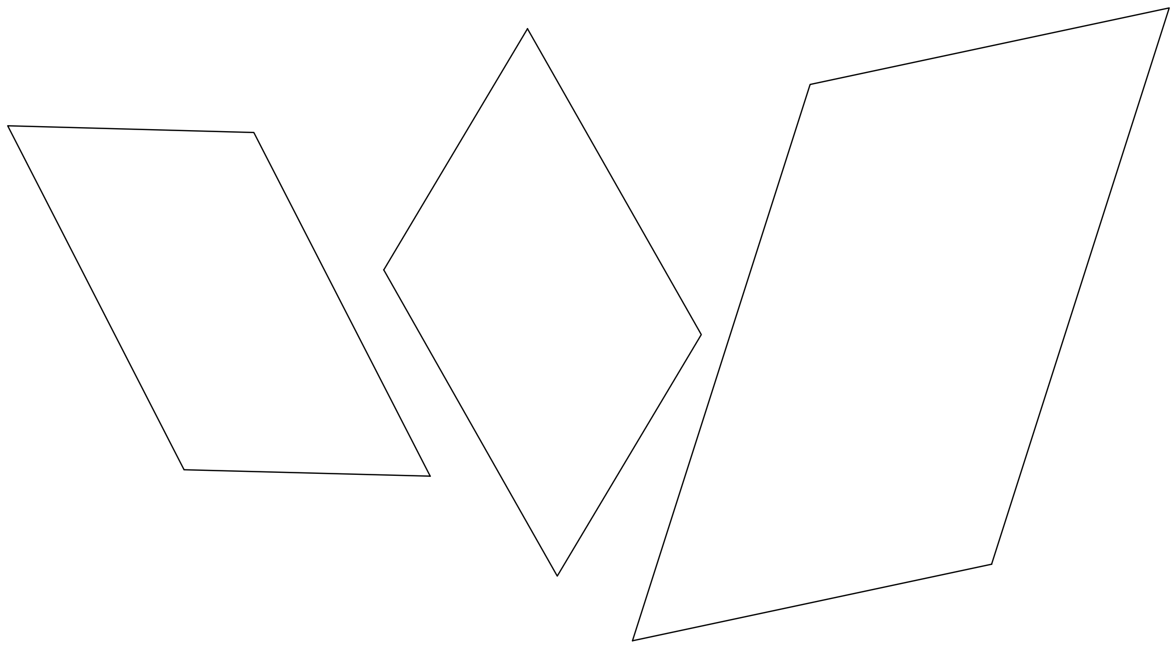
<u>Aufgabe 3:</u>
Die gekennzeichnete Fläche des Dodekaeder Netzes kann auch an anderen Stellen angefügt werden. Kennzeichne diese Stellen.



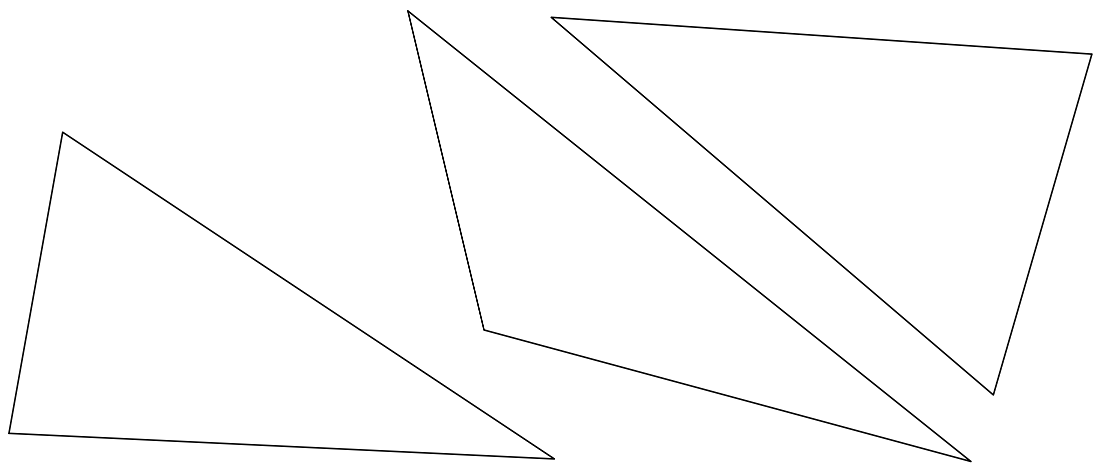
Andreas Koepsell, Charlottenstr. 11, 30449 Hannover

Aufgabe 1:
Zeichne ein Dreieck mit $c = 7{,}8$ cm, $\alpha = 57°$ und $ß = 68°$.
Nun soll der Flächeninhalt dieses Dreiecks berechnet werden. Miss dazu eine Grundseite und eine Höhe aus und berechne den Flächeninhalt.

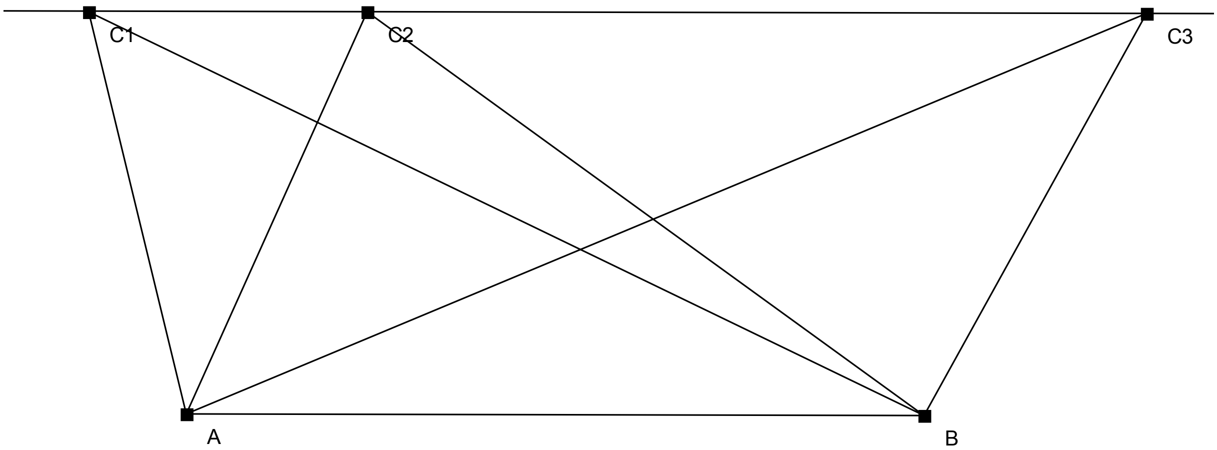
Aufgabe 2:
Berechne den Flächeninhalt folgender Parallelogramme. Notwendige Messungen sind durchzuführen.



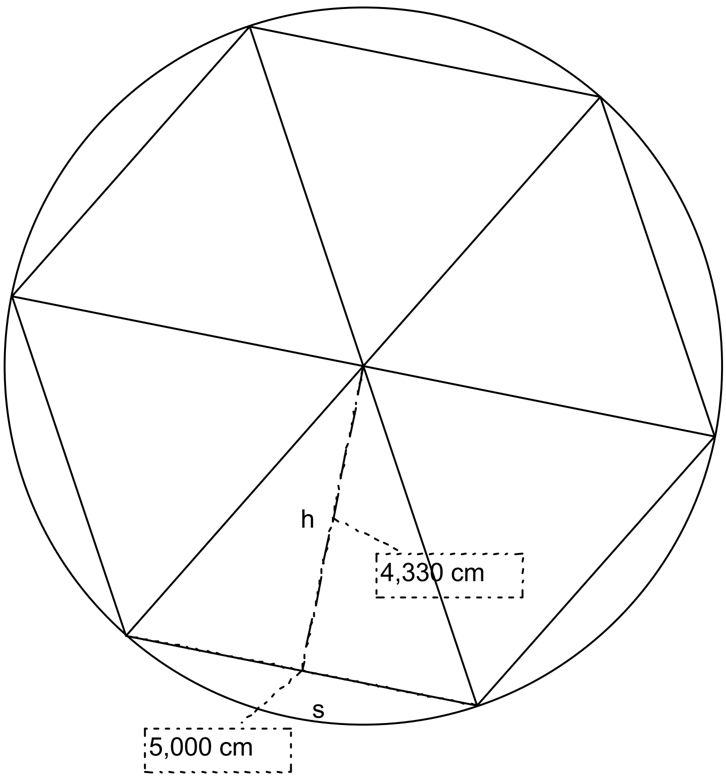
Aufgabe 3:
Berechne den Flächeninhalt folgender Dreiecke. Die benötigten Maße bestimme durch Messung!



Aufgabe 4:
In der Zeichnung siehst du drei Dreiecke, die eine gemeinsame Grundseite besitzen und deren Eckpunkte C sich auf einer Parallele zu c befinden.
Beschreibe die **Gemeinsamkeit**, die die drei Dreiecke besitzen!



Aufgabe 5:
- Berechne den Flächeninhalt des abgebildeten regelmäßigen Sechsecks!
- Zeige, dass ein regelmäßiges Sechseck aus drei gleichen Parallelogrammen besteht, indem du die drei Parallelogramme mit unterschiedlichen Farben anmalst.
- Stelle eine Formel für die Fläche eines regelmäßigen Sechsecks auf.

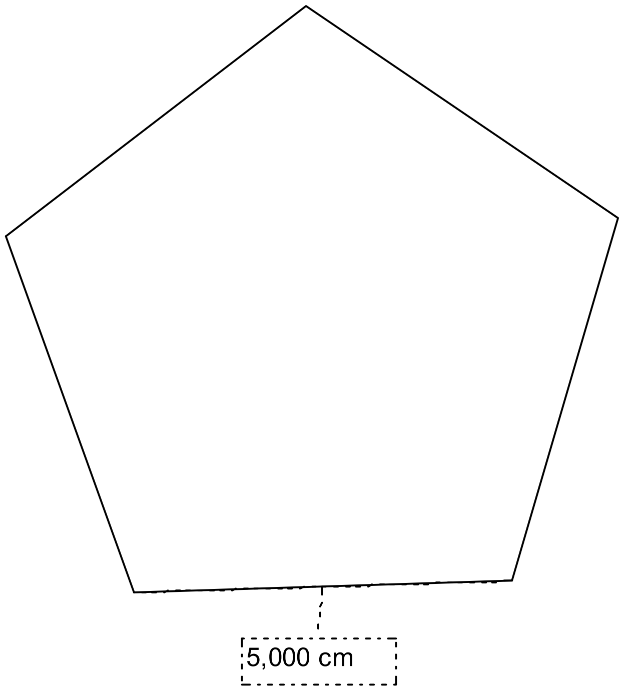


Flächen und Körper

Ein Lehrangebot für eine 8. Klasse einer Integrierten Gesamtschule
Zusammengestellt von Andreas Koepsell, Charlottenstr.11 30449 Hannover

Aufgabe 1:
In der Abbildung ist ein regelmäßiges Fünfeck zu sehen. Unterteile das Fünfeck sinnvoll in Dreiecke.

- Berechne den Flächeninhalt des Fünfecks, indem du die Flächeninhalte der Dreiecke addierst. Entsprechende Messungen sind in der Zeichnung durchzuführen und gemessen Strecken einzuzeichnen.
- Konstruiere ein gleiches Fünfeck in dein Heft.

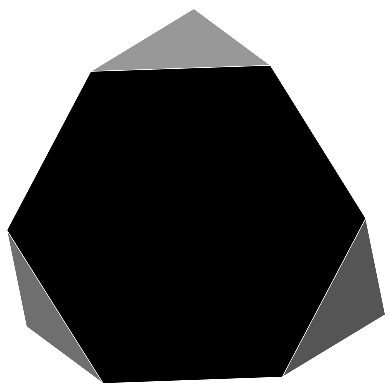


Aufgabe 2:
Konstruiere ein Dreieck mit einem Flächeninhalt von 27 cm^2 und einer Grundseite von 7,5 cm. Es gibt hier keine eindeutige Lösung. Man kann Dreiecke mit unterschiedlichen Formen konstruieren.

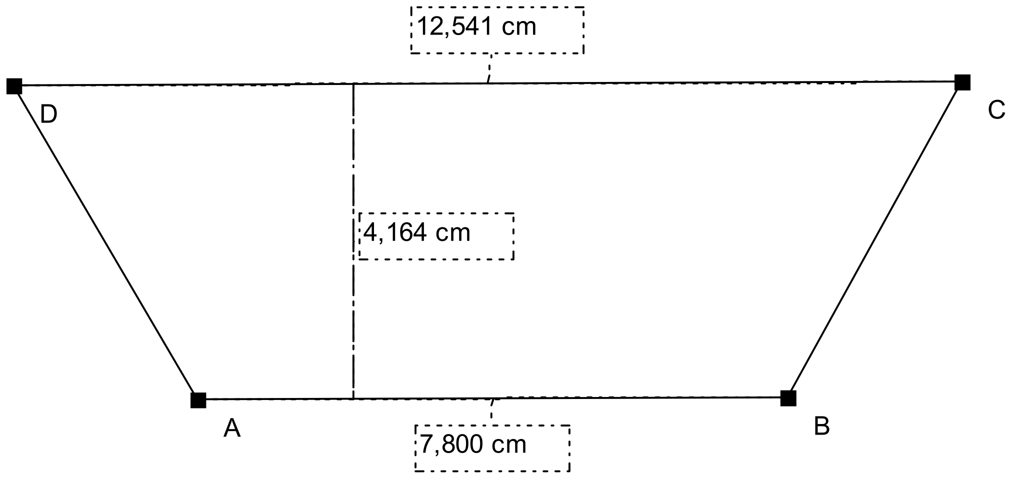
Aufgabe 3:
Ein Tetraeder hat eine Kantenlänge von 6 cm. Konstruiere das Netz dieses Tetraeders und berechne die Oberfläche diese Körpers. Notwendige Messungen sind in dem Tetraeder Netz durchzuführen!

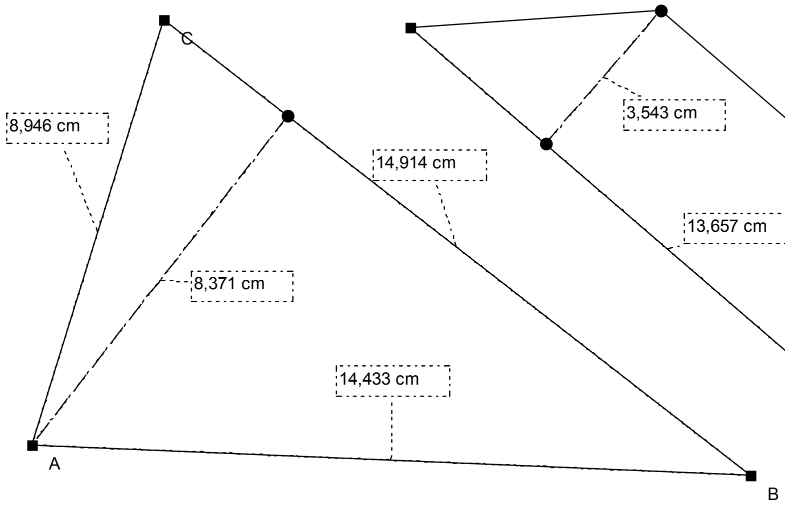
Aufgabe 4:
Du siehst rechts einen einfachen archimedischen Körper.

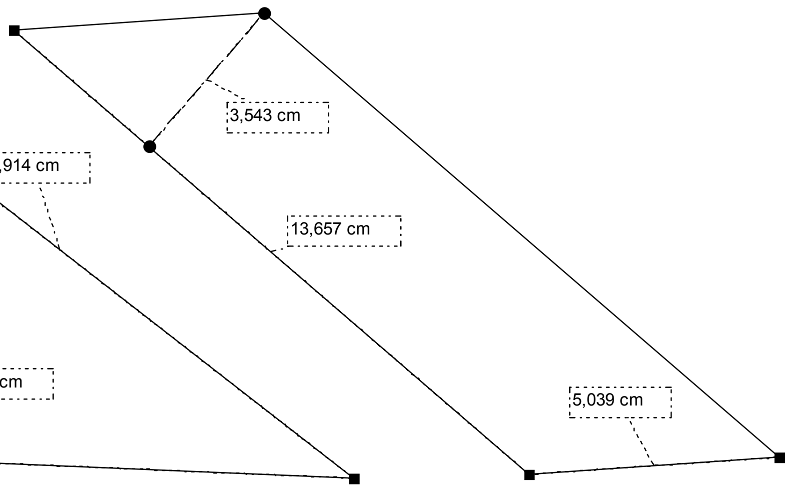
- Beschreibe diesen Körper eindeutig.
- Zeichne das Netz dieses Körpers mit der Kantenlänge 4 cm.
- Berechne den Flächeninhalt der Oberfläche dieses Körpers. Entsprechende Höhen im Sechseck und im Dreieck sind zu messen.



Aufgabe 1: Berechne den Flächeninhalt der folgenden Figuren. Alle benötigten Maße sind enthalten.







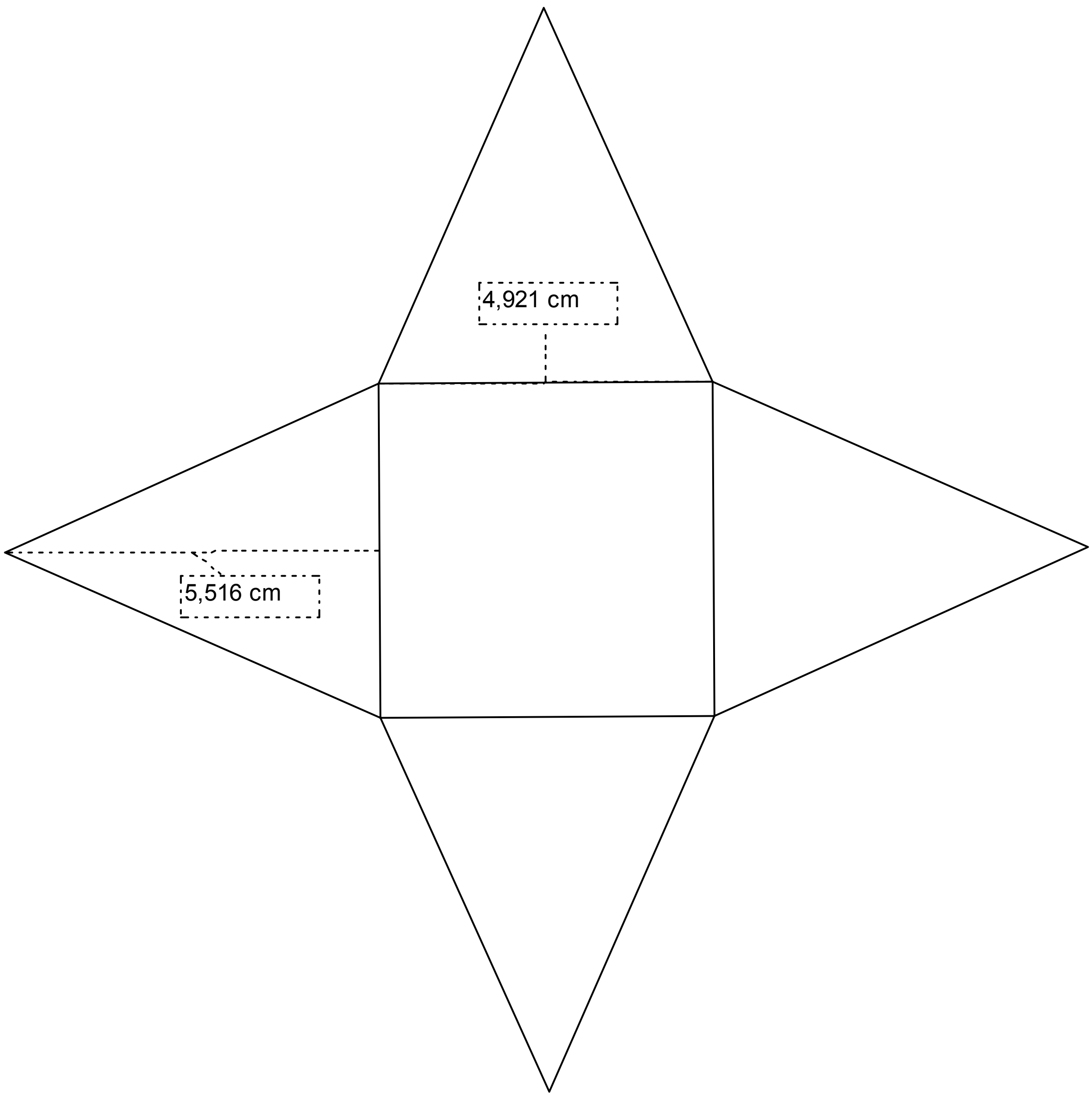
Aufgabe 2:
Konstruiere ein Parallelogramm mit einem Flächeninhalt von 49 cm^2 und einer Grundseite von 9 cm. Der Winkel α beträgt 72°.

Aufgabe 3:
Konstruiere ein Dreieck mit $c = 7{,}5$ cm, $h_c = 5{,}3$ cm und $ß = 72°$. Berechne den Flächeninhalt A.

Aufgabe 4:

Hier wurde das Netz eines geometrischen Körpers abgebildet!

- Beschreibe diesen Körper eindeutig!
- Ist dieser Körper ein „Archimedischer Körper". Begründe deine Antwort.
- Berechne den Flächeninhalt dieses Körpernetzes
- Zeichne diesen Körper in der Schrägbildperspektive. Konstruiere zunächst einen Quader mit den Maßen 10 * 10 * 15 cm.



Aufgabe 5:

Verwandle in die angegebene Maßeinheiten:

3,5607 m^2 =	cm^2
45,9 cm^2 =	dm^2
0,05 cm^2 =	mm^2
2,5 m^2 =	cm^2
0,0568 cm^2 =	mm^2

Flächen und Körper

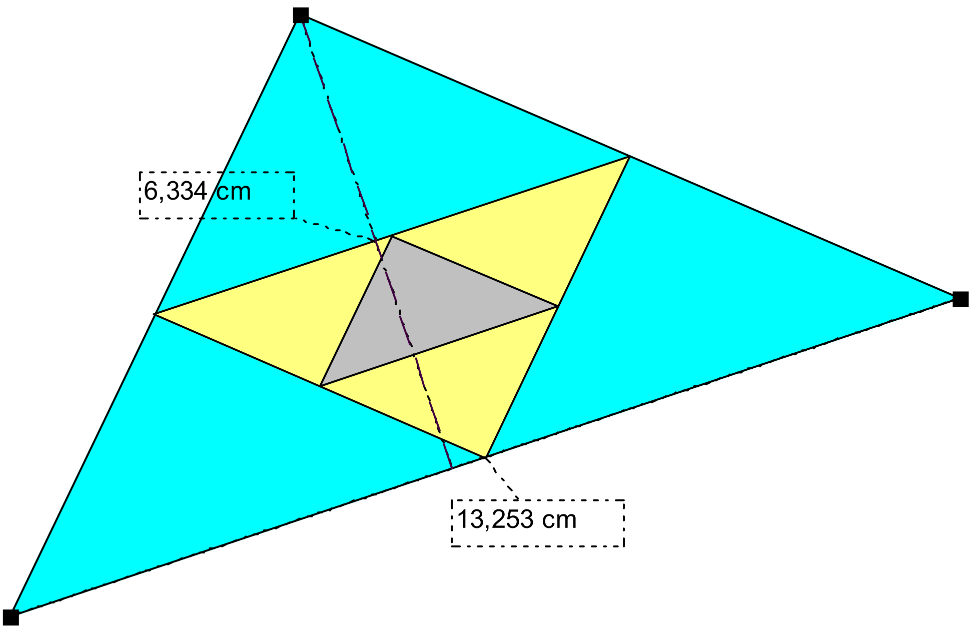
Ein Lehrangebot für eine 8. Klasse einer Integrierten Gesamtschule

Zusammengestellt von Andreas Koepsell, Charlottenstr.11 30449 Hannover

Aufgabe 1:

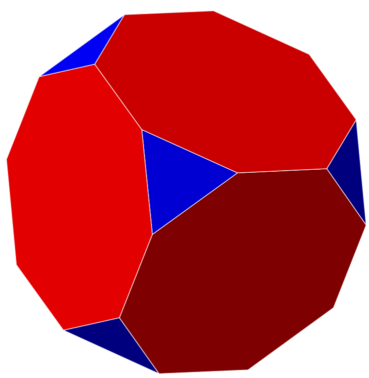
Die Zeichnung zeigt ein Dreieck, das durch geometrische Konstruktionen mehrmals verkleinert wurde.

- a.) Beschreibe die Konstruktion, die zur Verkleinerung des Dreiecks führt!
- b.) Berechne den Flächeninhalt des großen Dreiecks.
- c.) Berechne den Flächeninhalt des mittleren und des kleinsten Dreiecks.
- d.) Zeige durch weitere Unterteilung des Dreiecks, dass das kleine Dreieck 16 mal in das große Dreieck passt.



Aufgabe 2:

Der archimedische Körper ist aus dem Würfel entstanden.

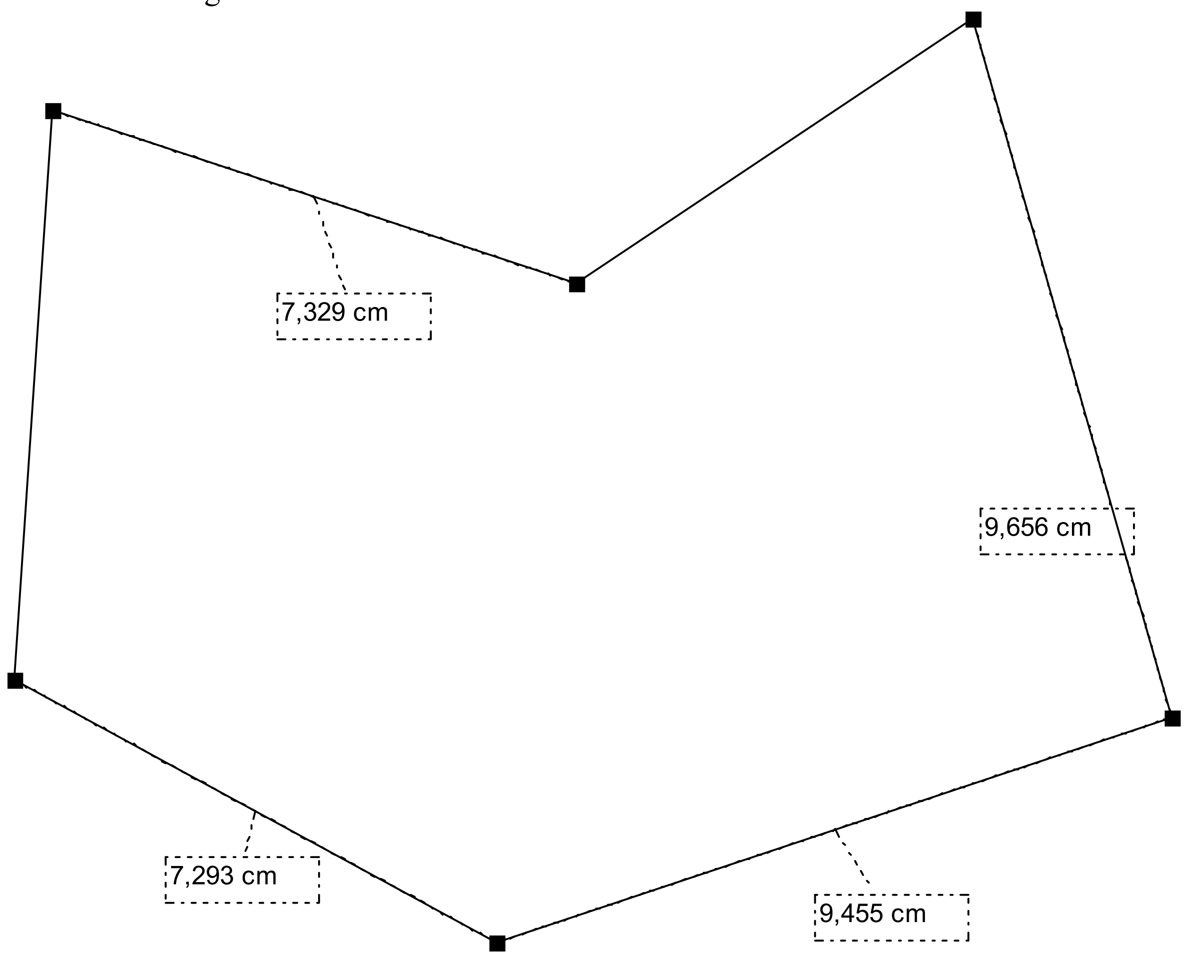


- a.) Aus wie vielen Achtecken und aus wie vielen Dreiecken besteht dieser Körper?
- b.) Konstruiere ein solches Achteck und ein solches Dreieck, aus dem dieser Körper besteht. Die Kantenlänge des Dreiecks und des Achtecks sei 4 cm.
- c.) Zeichne das Schrägbild dieses Körpers. Zeichne zunächst das Schrägbild eines Würfels und schneide dann die Ecken ab. Der Würfel hat eine Kantenlänge von 10 cm. Die Ecken werden so

abgeschnitten, dass eine Kantenlänge des Achtecks von 4 cm entsteht. Beachte, dass die schräg nach hinten verlaufenden Kanten nur halb so lang sind.

Aufgabe 3:

Zerteile die dargestellte Fläche sinnvoll in Figuren, deren Fläche du berechnen kannst. Zeichne notwendige Maße ein und berechne den Flächeninhalt.



Aufgabe 4:

a.) Konstruiere ein Dreieck mit c = 9,5 cm a = 10,5 cm und α = 78°. Berechne den Flächeninhalt!

b.) Konstruiere ein Parallelogramm mit a = 9 cm, b = 5 cm und ß = 125 °. Berechne den Flächeninhalt!

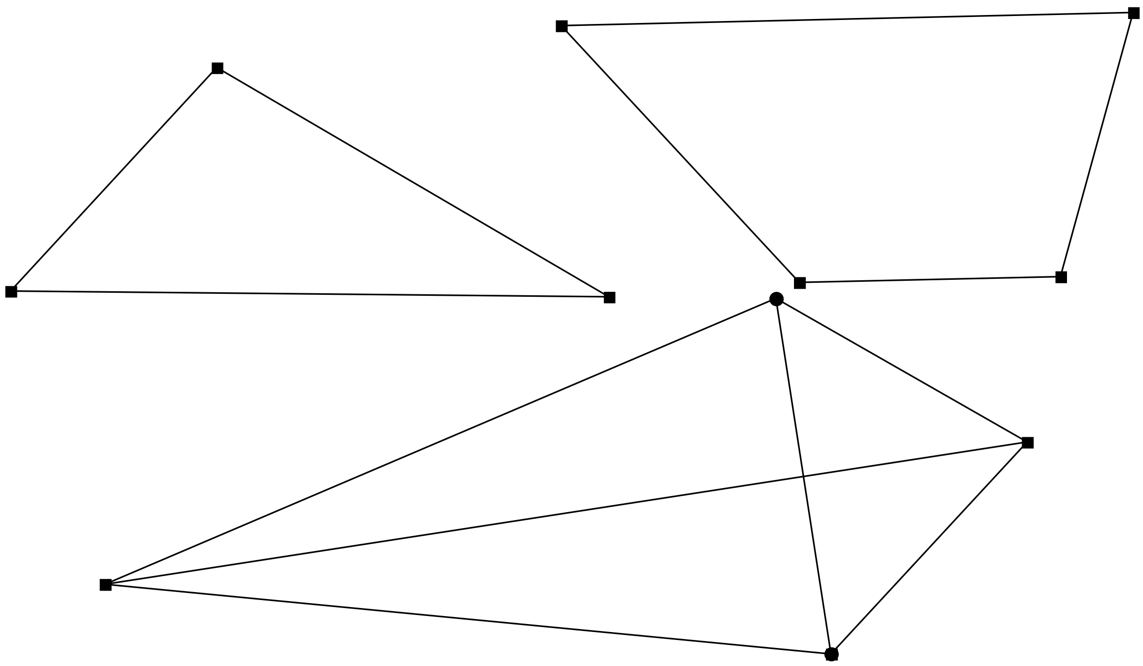
c.) Konstruiere eine Raute mit der Kantenlänge a = 7 cm. Der Winkel α beträgt 58 °. Um diese Raute konstruieren zu können, musst du die anderen Winkel aus den Eigenschaften der Raute berechnen!

d.) Konstruiere ein Trapez mit a = 6,9 cm, α = 75°, ß = 60 ° und der Höhe h_a= 4,2 cm. Berechne den Flächeninhalt.

Zusammengestellt von Andreas Koepsell, Charlottenstr.11 30449 Hannover

Test: Flächen und Körper

Aufgabe 1:
Berechne die Flächen der abgebildeten Figuren. Alle Maße müssen durch Messungen ermittelt werden.

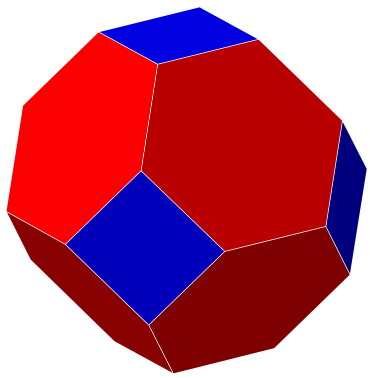


Aufgabe 2:

a.) Konstruiere ein Dreieck mit ß = 73°; c = 8,2 cm und b = 10,5 cm. Berechne den Flächeninhalt. (Maße, die du zur Berechnung benötigst, müssen durch Messung ermittelt werden.)

b.) Konstruiere ein Parallelogramm mit a = 6,8 cm, ß = 128° und h_a = 5,8 cm. Berechne den Flächeninhalt.

Aufgabe 3:
Dieser archimedische Körper ist aus einem Oktaeder durch Schnitte entstanden.



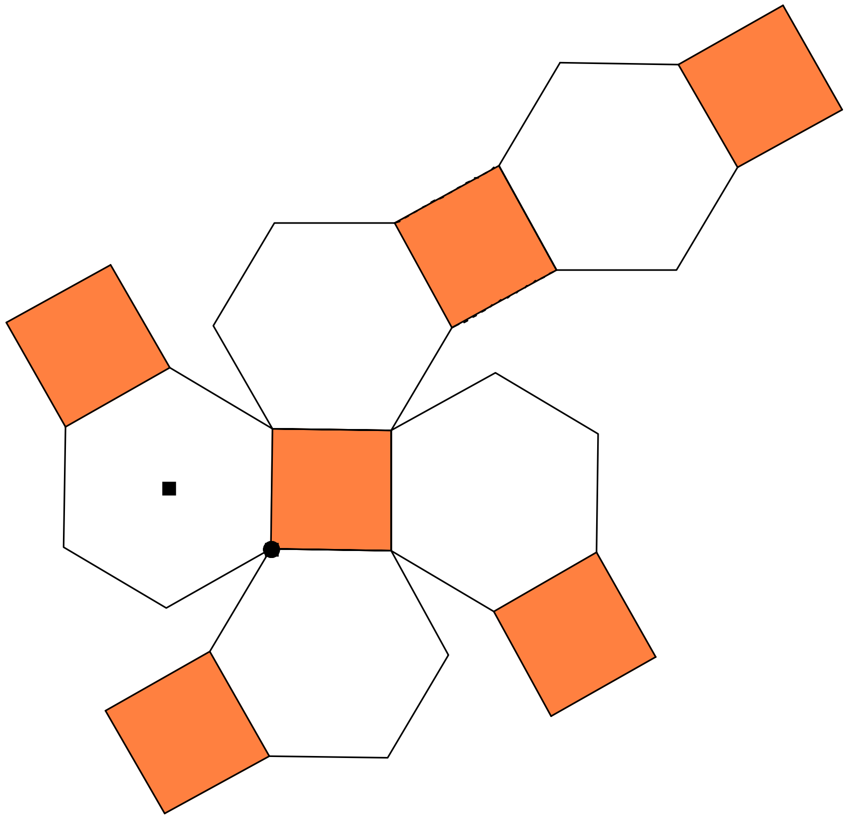
a.) Beschreibe diesen Körper eindeutig.

b.) Wie muss ein Oktaeder geschnitten werden, damit dieser Körper entsteht?

c.) Konstruiere die beiden regelmäßigen Vielecke, aus denen der Körper besteht. Die

Kantenlänge beträgt 5 cm

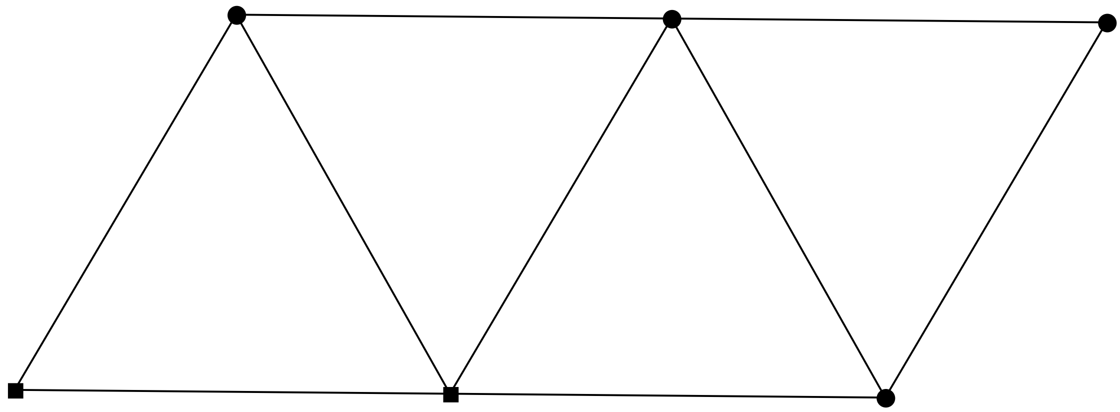
d.) Vervollständige das Netz dieses Körpers! (Die Flächen können skizziert, sie müssen nicht konstruiert werden.)



Aufgabe 4:

a.) Konstruiere in das Schrägbild eines Würfels ein Tetraeder. Der Würfel besitzt eine Kantenlänge von 10 cm. Das Würfelschrägbild wird dir zur Verfügung gestellt.

b.) Berechne die Oberfläche des abgebildeten Tetraeder Netzes. Notwendige Messungen sind durchzuführen.



Das Flechten der Platonischen Körper:

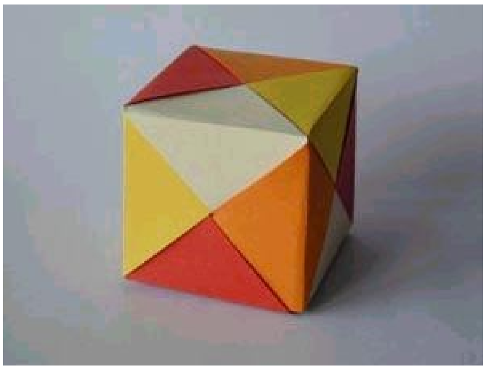
Das Flechten der Platonischen Körper wird auf der Internet Seite von Herrn Manuel Erdin sehr anschaulich beschrieben. Diese Seite habe ich hier dargestellt. Auch die Vorlagen der Flechtstreifen stammen von dieser Seite.

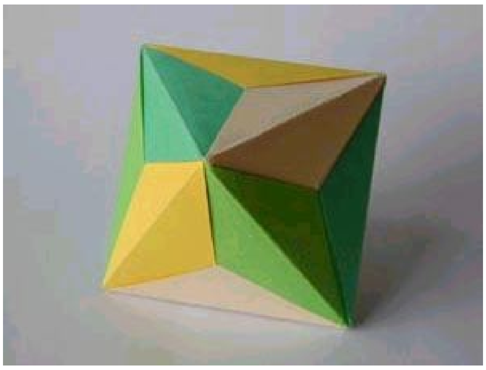
Internet Adresse:
http/mypage.bluewin.ch/manuel.erdin/PlatonischeKoerper/platon1.html

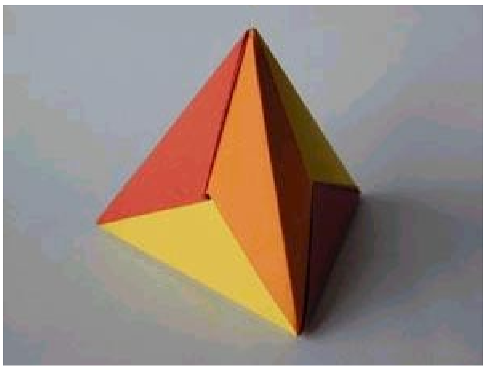
Vorbereitungen

Methodische Hinweise

Flechten







Mathematik - Platonische Körper: Vorbereitungen

Platonische Körper - Home

Vorbereitungen fürs Flechten von Platonischen Körpern

Zuerst gilt es, die nötigen Streifen auszuschneiden. Das Papier sollte etwas dicker sein, als normales Kopierpapier. In der Regel verwende ich Papier mit 160 g/m2. Es ist als dickes Kopierpapier in vielen Farben günstig in einem Copyshop erhältlich.

Die nachfolgende Tabelle gibt darüber Auskunft, welche Streifen für welchen Körper verwendet werden müssen:

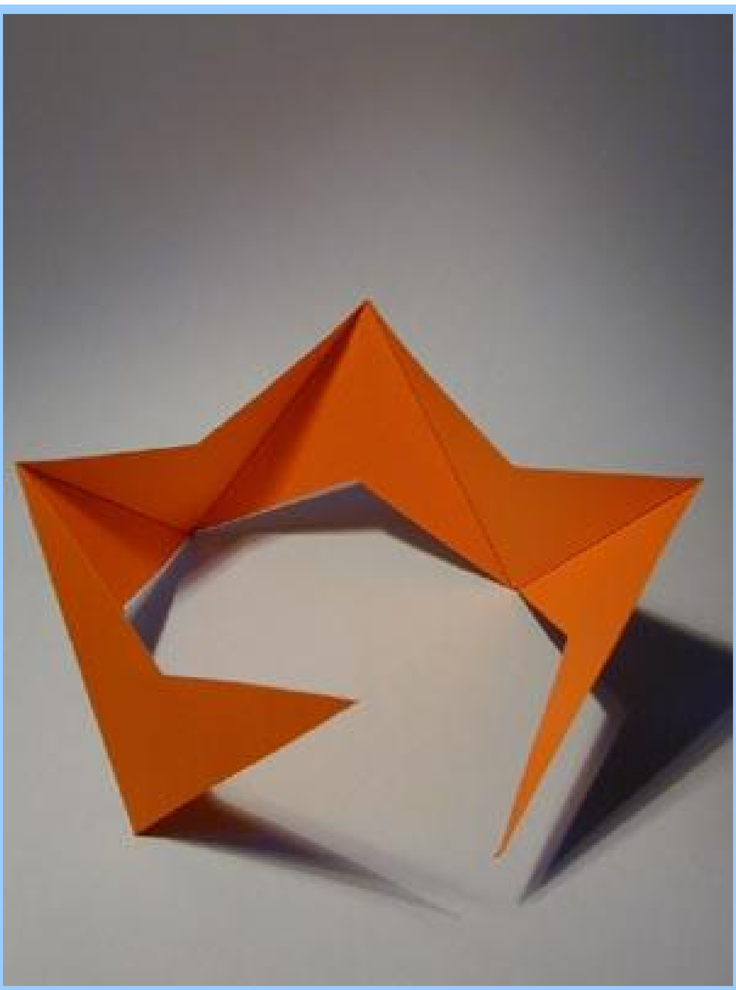
Körper	Form eines Streifenelements	Anzahl Streifenelemente	Anzahl Streifen pro Körper
Tetraeder	Zwei Elemente eines gleichseitigen Dreiecks	6	3
Würfel	Hälfte eines Quadrats	8	4
Oktaeder	Zwei Elemente eines gleichseitigen Dreiecks	8	4
Dodekaeder	Zwei Elemente eines gleichseitigen Fünfecks	12	6
Ikosaeder	Zwei Elemente eines gleichseitigen Dreiecks	12	6

Die fertigen Bögen stehen auch als PDF-Datei zum Download bereit:

flechten.pdf

Nach dem Kopieren gehts ans Ausschneiden. Das folgende Bild zeigt einen fertigen Streifen für ein Tetraeder.

Jetzt werden die Kanten gefalzt. Dies sollte möglichst gut und exakt gemacht werden. Erstens geht das Flechten dann leichter und der fertige Körper wird schöner. Damit die Linien der Kopie am Schluss nicht sichtbar sind, wird diese Seite nach innen gefaltet.



Dieser Streifen ist zur Weiterbearbeitung bereit. Jetzt gehts ans Flechten!

Top

Manuel Erdin, 5.7.2000

Mathematik - Platonische Körper: Vorbereitungen

Platonische Körper - Home

Methodische Hinweise für den Einsatz im Unterricht

Um Platonische Körper mit Schülerinnen und Schülern herzustellen ist am besten ein Block zu etwa drei bis vier Lektionen geeignet.

Vorschlag für einen Ablauf

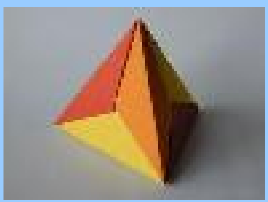
- Einführung ins Thema Polyeder, speziell Platonische Körper.

- Beweis für die Existenz von genau fünf Platonischen Körpern.

- Zeichnen des Netzes eines Tetraeders und eines Oktaeders und ev. Basteln eines dieser Körper mit Hilfe der gezeichneten Netze (Wo müssen Laschen fürs Verkleben ergänzt werden?). Führt man diesen Teil praktisch durch, so hebt sich das Flechten umso stärker als Besonderheit ab.

Dieser erste Teil benötigt gut eine Schulstunde.

- Herstellen eines geflochtenen Tetraeders. Der Tetraeder ist der einzige Körper, der mit nur drei Streifen geflochten werden kann. Deshalb sollten alle unbedingt mit diesem Körper beginnen. So stellt sich bald ein Erfolgserlebnis ein. Allerdings sind die Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler sehr unterschiedlich.



- Herstellen eines geflochtenen Würfels oder Oktaeders. Jetzt wird es etwas schwieriger, das bereits vier Streifen benötigt werden.

- Die Krönung besteht natürlich darin, einen Dodekaeder oder einen Ikosaeder mit sechs Streifen zu flechten! Für geschickte und schnelle Schülerinnen und Schüler ist dies durchaus möglich.

Dieser zweite Teil benötigt gut zwei Schulstunden.

- Viele Schülerinnen und Schüler nehmen am Schluss des Blocks gerne weitere Streifen mit nach Hause. Also: Nicht mit den Kopien sparen.

- Solche Blöcke habe ich mit DMS-Klassen und Gym-Klassen durchgeführt (10. oder 11. Schuljahr). Bei den meisten ist das Basteln sehr gut angekommen. Es ist eben etwas ganz anderes als Übungen zu lösen!

- Gute Mathematikschülerinnen und -schüler sind nicht unbedingt gute Bastlerinnen und Bastler. Die Klassenhirarche wird vielleicht auf den Kopf gestellt. (Macht gar nichts!)

Für Tipps und Anregungen für Änderungen und Ergänzungen bin ich froh! Ich bin unter der E-Mail-Adresse manuel.erdin@bluewin.ch erreichbar.

Top

Manuel Erdin, 1.4.2000

Mathematik - Platonische Körper: Das Flechten

Platonische Körper - Home

Das Flechten von Platonischen Körpern

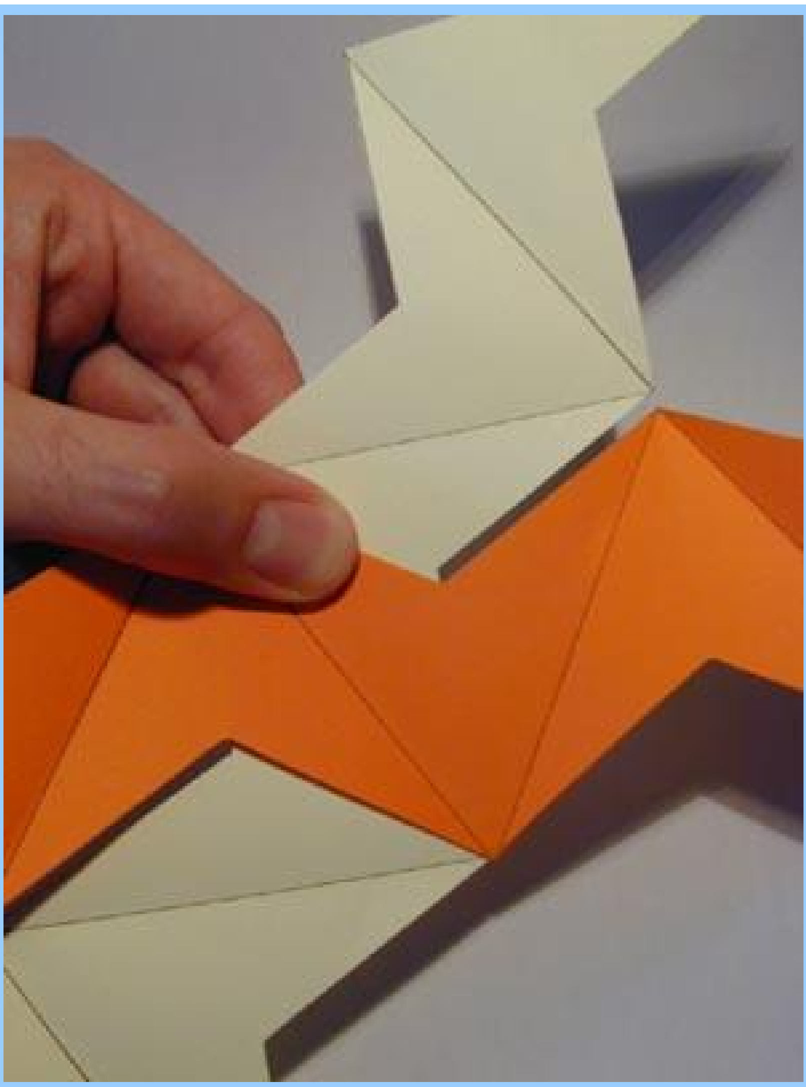
Es ist ganz wichtig, das Flechten richtig zu beginnen. Denn am Schluss sollen alle Zipfel an den Streifenenden im Innern der Körper verschwinden und nicht vorstehen. Beachten Sie dazu die folgende Bildsequenz:



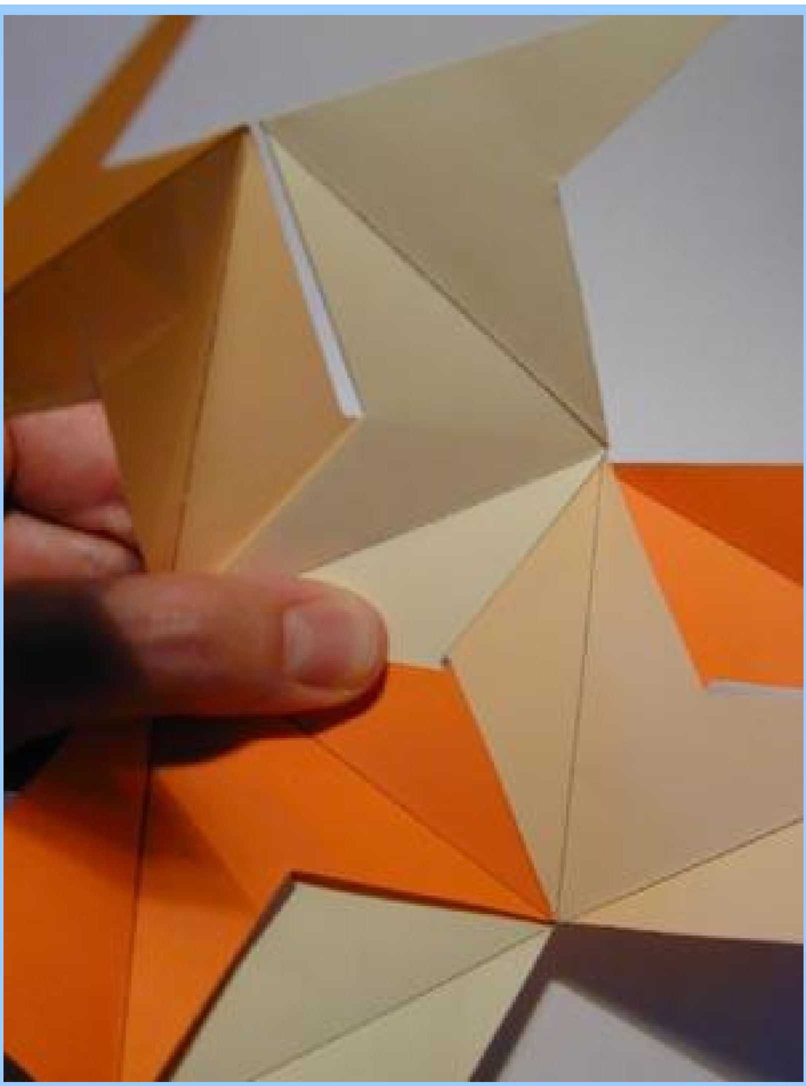
Linkes Bild: Der äusserste Zipfel soll am Schluss verschwinden, wird also unsichtbar sein.

Mittleres Bild, rechtes Bild: Diese Teile müssen folglich aussen sichtbar bleiben.

Zwei Streifen sind nun so zusammenzufügen, dass am Schluss sichtbare Teile unten, nicht sichtbare dagegen oben zu liegen kommen. Am besten fügt man die Streifen etwa in der Mitte zusammen.



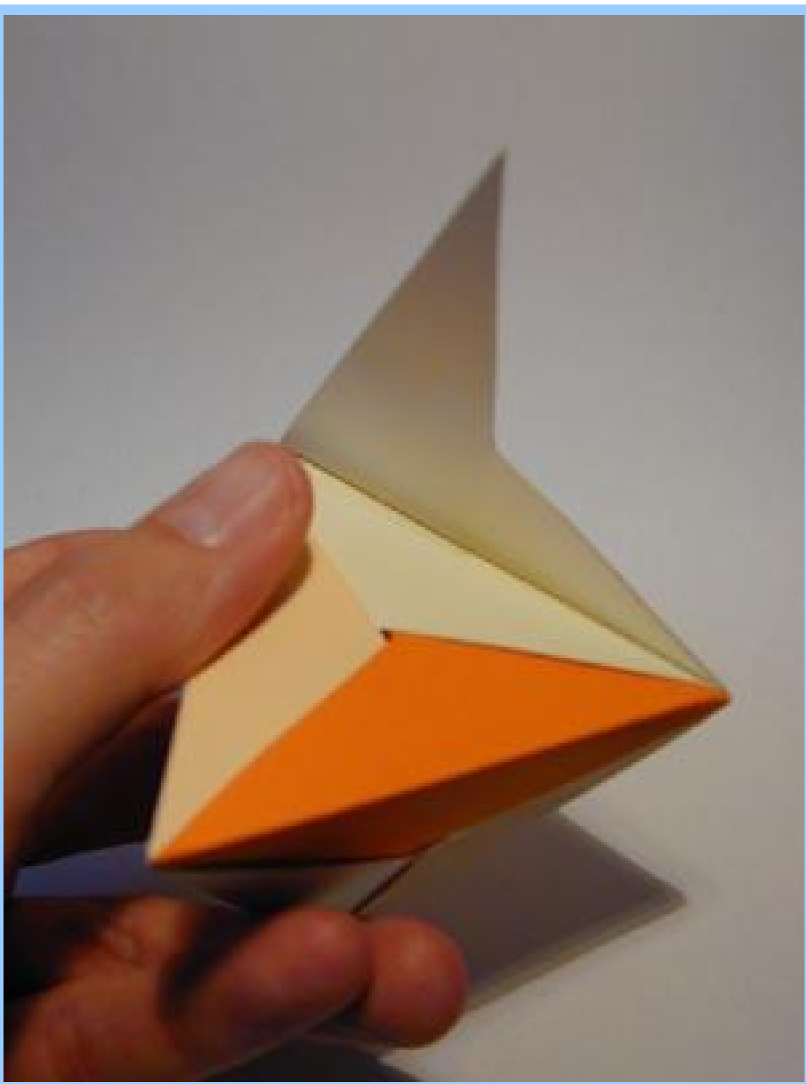
Wenn der letzte Streifen hinzukommt, kann bezüglich Zipfel nichts mehr schief gehen. Dafür beginnt jetzt das Problem, dass man eigentlich für jeden Streifen gerne eine Hand hätte...



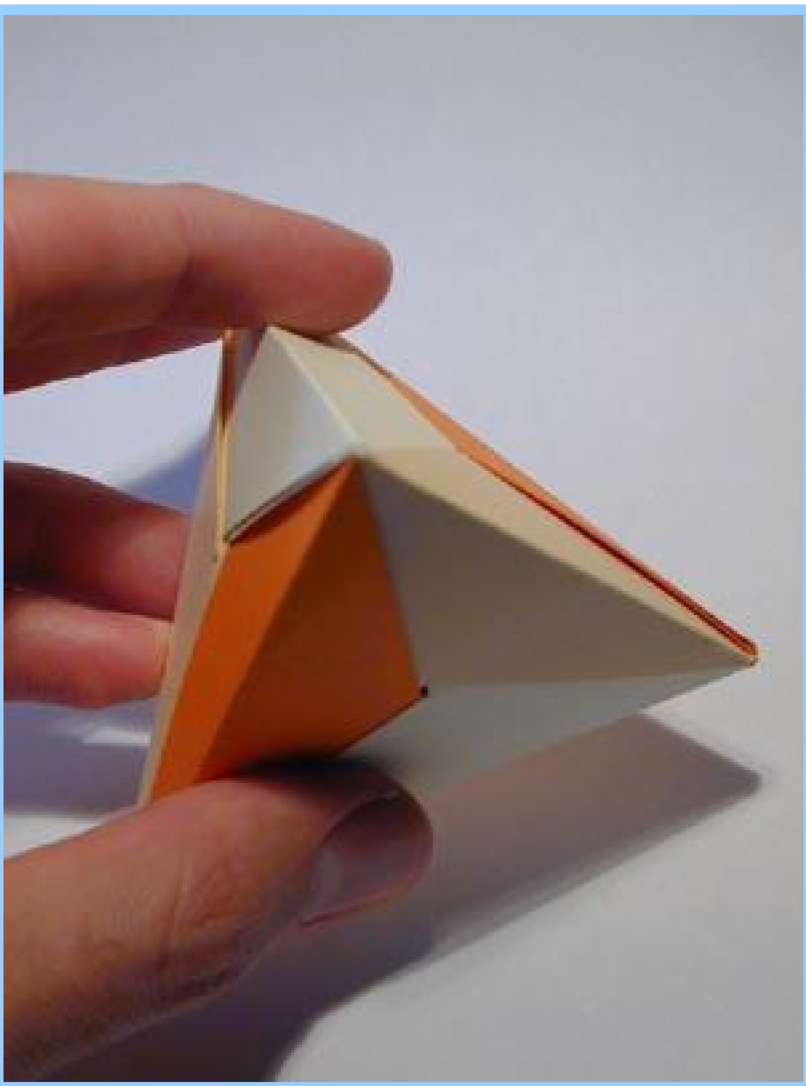
Nun können die Kanten der ersten fertigen Seitenfläche hochgebogen werden. Es wird dann klar, welche Streifen, resp. welche Streifenteile die angrenzenden Seitenflächen bilden. Es ist von Vorteil, zuerst die längsten Streifen einzuflechten. So ergibt sich eine Seite nach der anderen.

Bei Platonischen Körpern mit vier oder sechs Streifen behilft man sich am besten mit Büroklammern, um bereits geflochtene Teile zu sichern.

Beim oberen Bild sind bereits drei Seiten geflochten, nur noch eine fehlt zum fertigen Tetraeder. Die Streifen sind offensichtlich etwas zu lang, d.h. gewisse Teile werden doppelt geflochten. Dies erhöht die Stabilität des fertigen Körpers erheblich.



Der magische Moment: Nur noch ein Zipfel ist einzuflechten. Jetzt zeigt es sich, ob am Anfang die ersten beiden Streifen auch richtig zusammengefügt wurden.



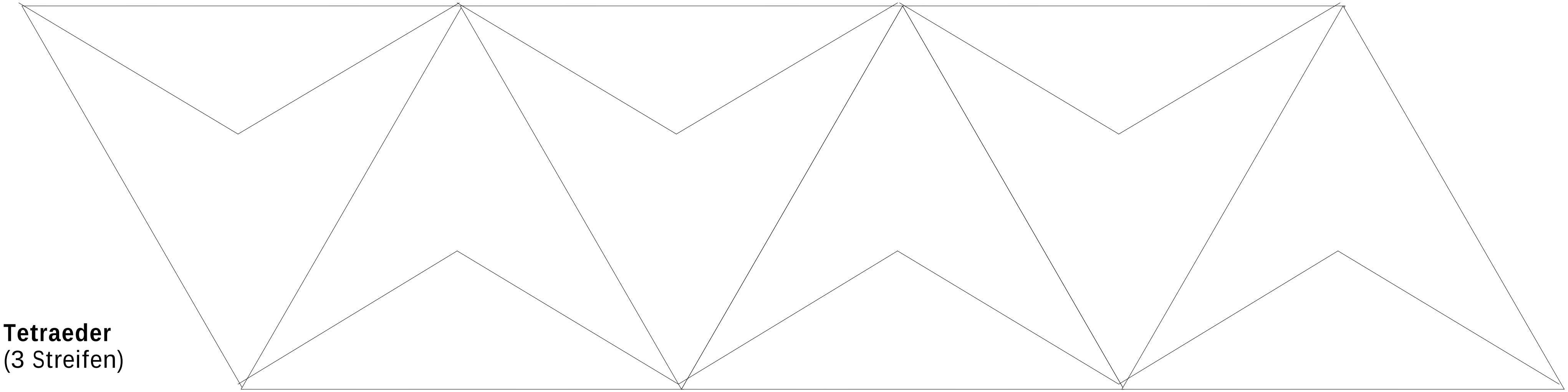
Fertig!

Wie lange dauert das Flechten? Geübte flechten ein Tetraeder mit vorbereiteten Streifen in etwa zwei Minuten. Beim ersten Mal dauerts natürlich etwas länger. Aber das Resultat entschädigt für die Anstrengungen! Die Zeit für ein Ikosaeder? Am besten entscheidet man sich schon vorher: Spielfilm schauen oder Ikosaeder flechten...

Top

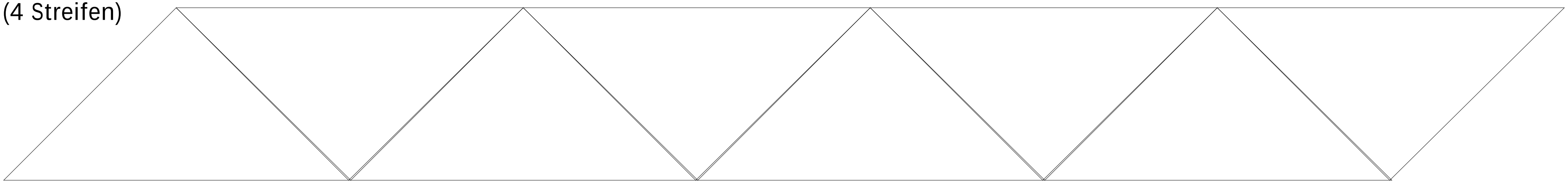
Manuel Erdin, 5.7.2000

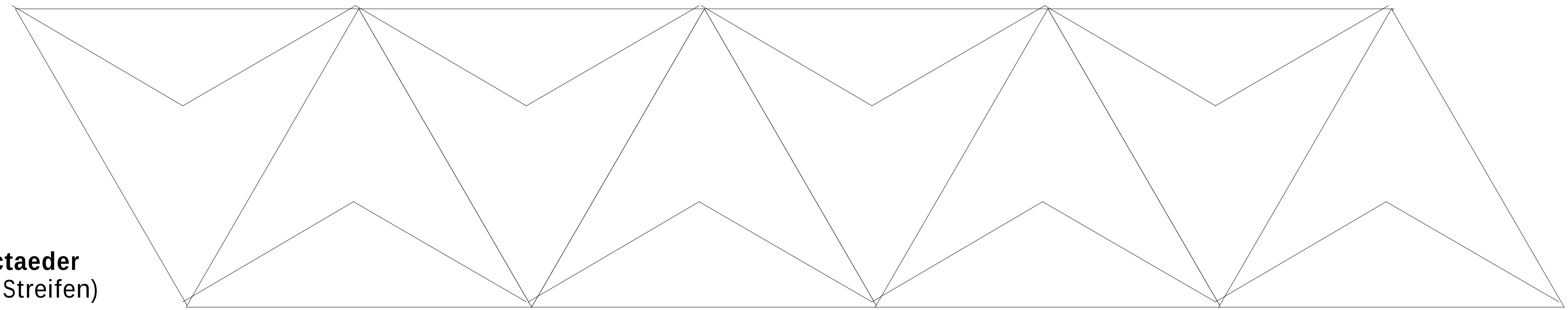
Flechtvorlagen für die fünf Platonischen Körper (Teil 1)



Tetraeder
(3 Streifen)

Würfel
(4 Streifen)

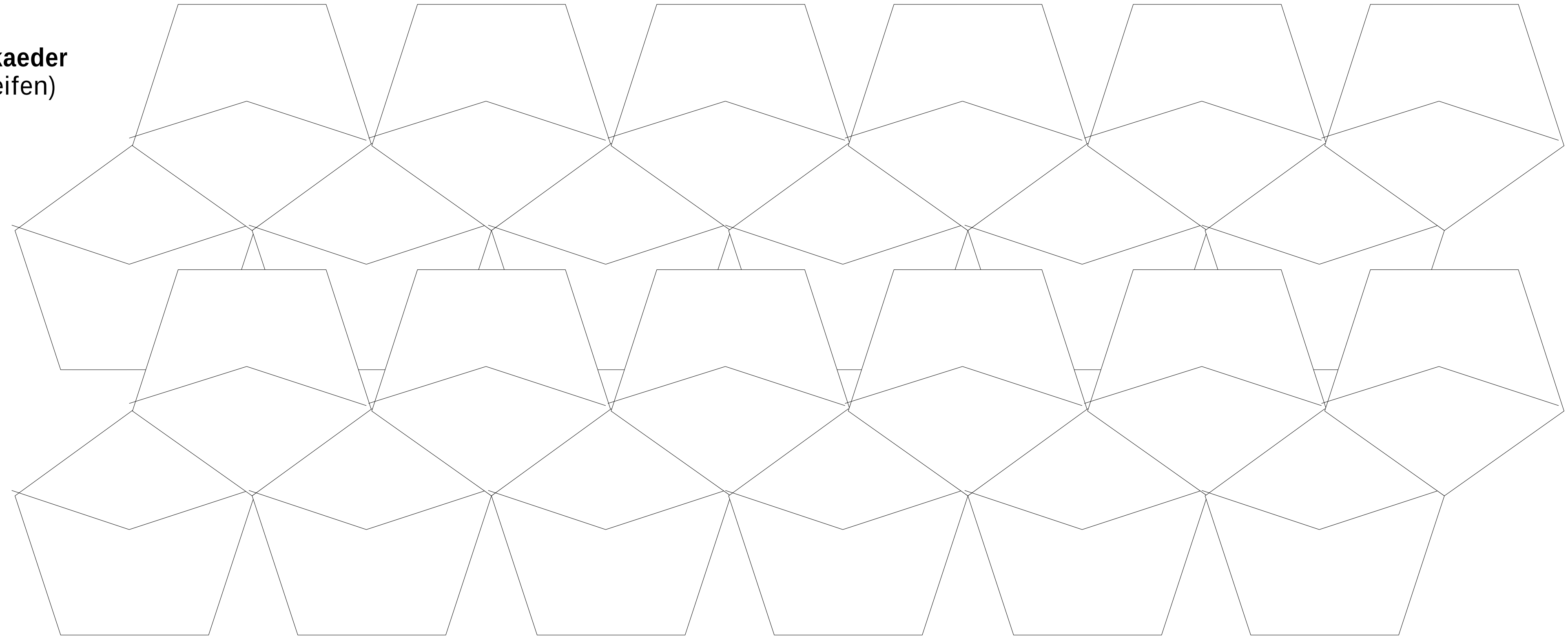




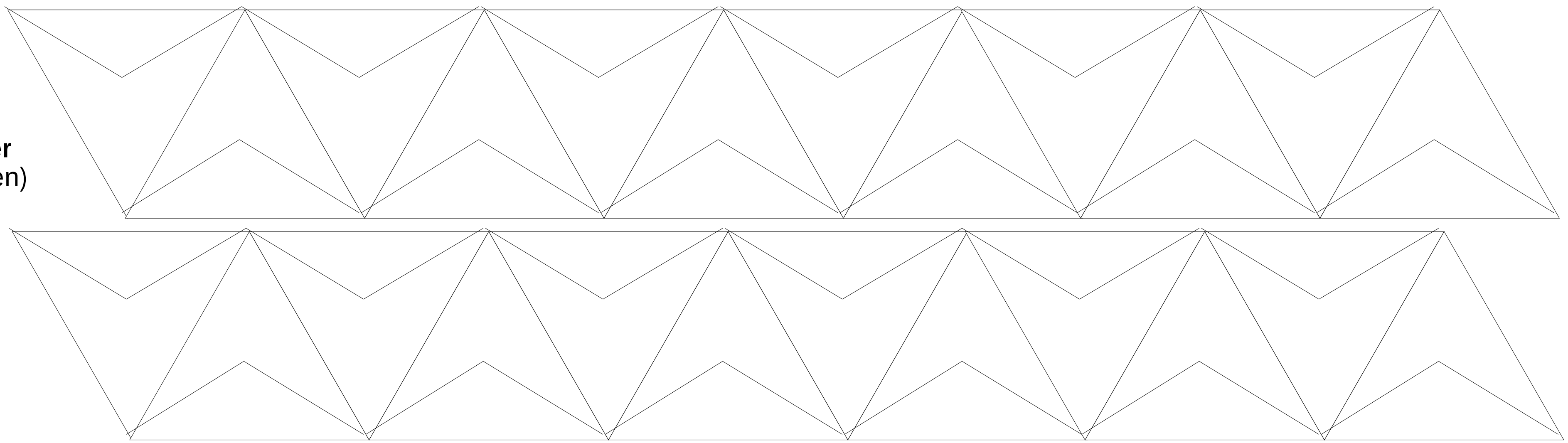
Octaeder
(4 Streifen)

Flechtvorlagen für die fünf Platonischen Körper (Teil 2)

Dodekaeder
(6 Streifen)

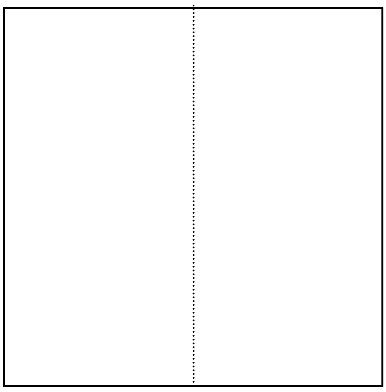


Ikosaeder
(6 Streifen)

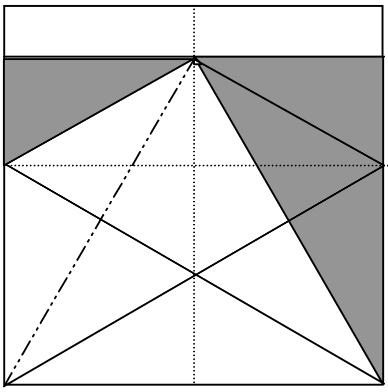


Pyramide und Tetraeder falten

1. Quadratisches Papier (15 x 15) auf Mitte falten

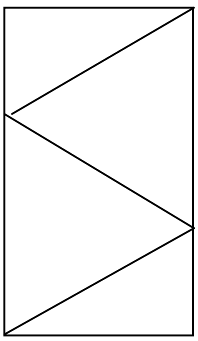


2. Rechte untere Ecke auf die Mittellinie falten, wieder entfalten, linke untere Ecke ebenfalls auf die Mittellinie falten. Der Faltpunkt gibt an, was abgeschnitten wird.



3. An der Mittellinie durchschneiden. Gleichseitige Dreiecke ausfalten.

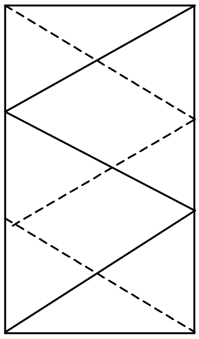
4 3



1 2

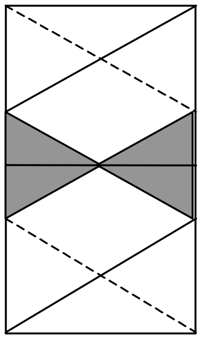
So gegenfalten, dass ein Rautenmuster entsteht. Dazu Ecke 2 auf Ecke 4 falten.

Anschließend die Ecken 1 und 3 so überfalten, dass ein gleichseitiges Dreieck entsteht.



4. Entfaltet muss nun ein Rautenmuster vorliegen. Kurze Seiten auf Mitte falten, entfalten. Über die gerade entstandene Bergfalte mittig als Talfalte gegenfalten.

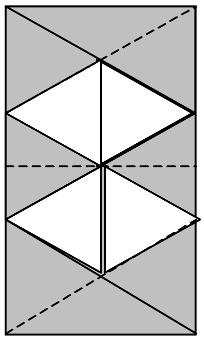
5.



Markierte Dreiecke nach innen wegfalten. Das geht am besten, wenn das Papier vorher noch mal gewendet wurde. Die verbleibenden Reste in die Pyramide hineinfalten.

6.

Die weißen Flächen werden zu Deckflächen der Pyramide. Die grauen Flächen müssen in der Pyramide verschwunden sein. Für einen Tetraeder: Man muss eine Deckfläche ebenfalls mit wegfalten, so dass drei Deckflächen übrigbleiben.



Um eine Pyramide mit doppelter Kantenlänge aus kleinen, gefalteten Pyramiden und Tetraedern zusammenzustellen, braucht man sechs Pyramiden und vier Tetraeder. Da das Volumen dieser zusammengesetzten Pyramide ist $2^3 = 8$ mal so groß ist wie die kleine Pyramide, müssen zwei Tetraeder das Volumen einer kleinen Pyramide haben

oder

(1 Tetraeder = 1/2 Pyramide)

symb: $6\,P + 4\,T = 8\,P \quad | \; -6\,P$

$4\,T = 2\,P \quad | \; :4$

$T = 1/2\,P$

Warum hat ein Tetraeder eigentlich das halbe Volumen einer Pyramide mit gleicher Außenflächenform?

Abb. 1 stellt vier Pyramiden dar. Die Außenflächen sind gleichseitige Dreiecke.

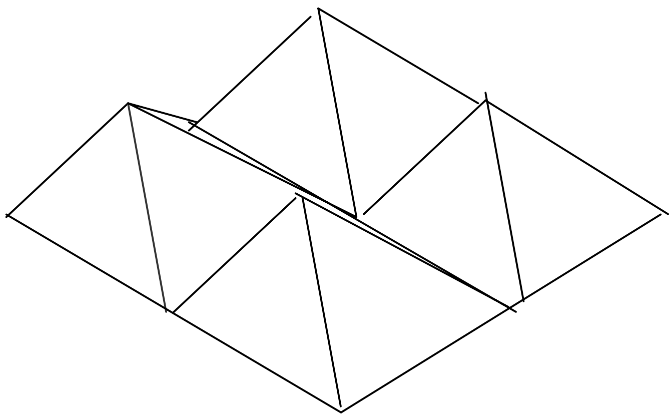


Abb. 1

Steckt man jeweils zwischen zwei Pyramiden einen Tetraeder (mit gleicher Außenfläche), so passt in den entstehenden Innenraum eine weitere Pyramide hinein. In Abb. 2 sind die vier eingefügten Tetraeder an den deutlich dickeren Linien zu erkennen (hoffentlich).

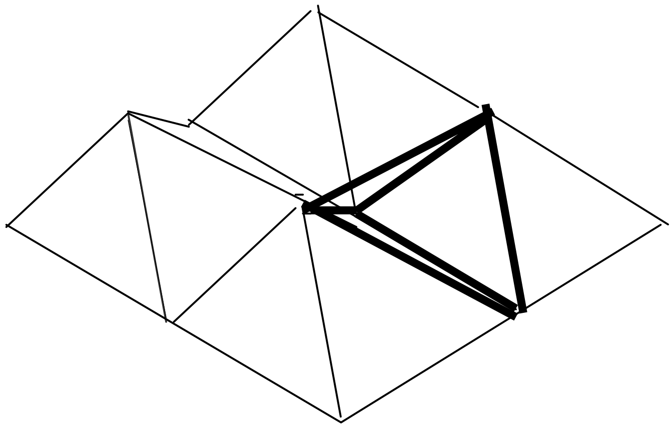


Abb. 2

Eine abschließend aufgesetzte Pyramide vervollständigt die Figur, die nun acht mal so groß sein muss wie die kleine Pyramide. In jeder Dimension - Länge, Breite, Höhe - hat sich die Kantenlänge verdoppelt. Die Grundfläche hat sich vervierfacht, das Volumen hat sich verachtfacht (siehe auch S. 20)

2 Tetraeder = 1 Pyramide . Warum?

$4\,P + 4\,T + 2\,P = 2^3\,P$

$4\,T = 2\,P$

$2\,T = 1\,P$. Oder?

Mit einer Mischung aus Falten von offenen Körpern, ein wenig Wissen über funktionale Zusammenhänge beim Verdoppeln von Kantenlängen und ganz wenig Algebra beweist man den Zusammenhang zwischen Pyramide und Tetraeder.
Das hat viel Handlungsorientierung und 'Mathematik zum Anfassen'.

Lernwerkstatt Mathematik **26.02.01**

Platonische und Archimedische Körper

Bau von Styropor-Körpern

Ziele:

- Die Platonischen Körper und ihre Eigenschaften kennen lernen (Station 1).
- Aus räumlichen Modellen Netze der Körperoberflächen zeichnen können (Station 2).
- Den Eulerschen Polyedersatz entdecken (Station 2).
- Beim Zerschneiden von Styropor-Würfeln erkennen, wie aus Platonischen Körpern neue Formen entstehen (Station 3).
- Selbstständig aus einem Styropor-Würfel ein Tetraeder herstellen und dabei die Lagebeziehungen der beiden Körper zueinander kennen lernen (Station 4).
- Die Lagebeziehungen zum Einzeichnen von Hilfslinien nutzen (Stationen 3,4,5).
- Selbstständig aus einem Styropor-Würfel ein Oktaeder herstellen und dabei die Lagebeziehungen der beiden Körper zueinander kennen lernen (Station 5).

Methode:
Als eine mögliche Methode wurde hier das Stationenlernen gewählt, wobei alle Schülerinnen und Schüler die Stationen in der Reihenfolge 1 – 5 durchlaufen sollen. Um Materialengpässe zu vermeiden, bieten sich nach den Stationen 1 bzw. 2 Differenzierungen über den Bau von Kantenmodellen oder die zeichnerische Darstellung von Platonischen Körpern an.

Material:
Als Material in Station 1 werden aus **Klickis** die 5 Platonischen Körper Würfel, Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder und Pentagon–Dodekaeder sowie das Kuboktaeder als Archimedischer Körper bereitgestellt.
In den Stationen 3 – 5 wird mit **Styropor** gearbeitet. Eine möglichst dicke Styroporplatte muss in Würfel zerschnitten werden. In Baumärkten sind 5 cm dicke Platten für ca. 2 DM zu kaufen, aus denen sich ca. 100 Würfel schneiden lassen.
Das **Schneiden der Würfel** kann mit einen professionellen Styroporschneidegerät (aus AWT?) oder auf einer festen Unterlage mit einem neuen Cuttermesser erfolgen. Dabei muss die Styroporplatte unter einer Holzleiste eingespannt werden.

Die Schüler erhalten für ihre Arbeit einfache **Cuttermesser** (im 10er-Pack günstig im Baumarkt). Mit den Cuttermesser kann man die Würfel glatt zerschneiden, wenn man die Klinge ganz ausfährt und hin- und her schneidet – nicht drücken, dann zerbröselt das Styropor!

Zum Anzeichnen der Hilfslinien eignen sich Folienstifte und Geo-Dreiecke.

Hinweis:
Die Würfel mit 5 cm Kantenlänge eignen sich nicht mehr, um daraus Ikosaeder und Pentagon-Dodekaeder herzustellen. Dazu müssten größere Würfel erzeugt werden, evtl. durch verkleben mehrerer Styroporplatten – das geht nur mit Spezial-Styroporkleber!

Lernwerkstatt Mathematik **26.02.01**
Platonische und Archimedische Körper

Station 1

1. Vor euch liegen 6 Körper - 5 von ihnen sind die Platonischen Körper.

1.1. Findet heraus, welcher Körper kein Platonischer Körper ist.
1.2. Beschreibt, woran man Platonische Körper erkennen kann.

2. Der „Sternkörper”, der ebenfalls bei eurer Station liegt, hat einen „Kern”. Der Kern bleibt übrig, wenn man alle hervorstehenden Ecken abschneidet. Welcher platonische Körper bildet den Kern des Sternkörpers?

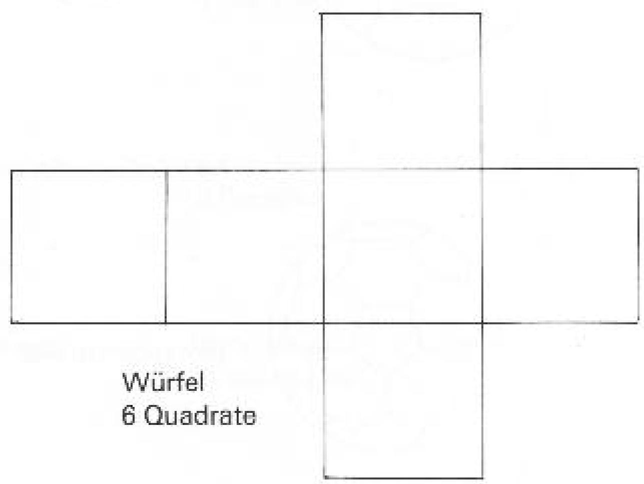
3. Informiert euch in den ausliegenden Büchern über die Namen der Platonischen Körper.
Legt für die Platonischen Körper folgende Tabelle an:

Name des Körpers	Oberfläche besteht aus	In einer Ecke stoßen zusammen:

Lernwerkstatt Mathematik **26.02.01**
Platonische und Archimedische Körper

Station 2

1. Klappt man einen Körper auseinander, so erhält das „Netz” des
   Körpers.
   Zeichnet für zwei Körper die Netze z.B.



2. Legt für die Platonischen Körper folgende Tabelle an:

Name des Körpers	Anzahl der Flächen	Anzahl der Ecken	Anzahl der Kanten

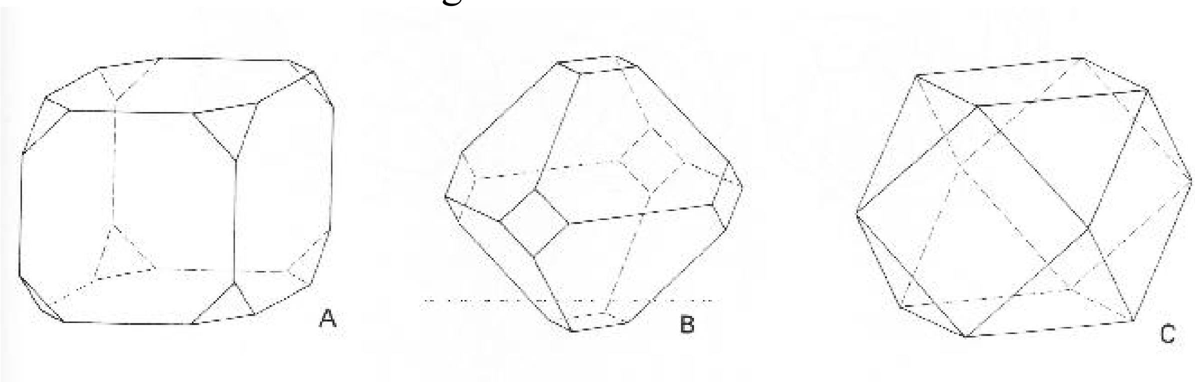
3. Findet die Gesetzmäßigkeit heraus, die dieser Tabelle zu Grunde liegt.

Lernwerkstatt Mathematik **26.02.01**
Platonische und Archimedische Körper

Station 3

Als Material erhaltet ihr Styropor-Würfel mit der Kantenlänge 5 cm, Cutter-Messer (Vorsicht!!) und Folienstifte.
Mit den Cutter-Messern kann man die Styropor-Würfel glatt zerschneiden, wenn man die Klinge ganz ausfährt und hin- und herschneidet.

Stellt aus den Würfeln folgende Formen her:



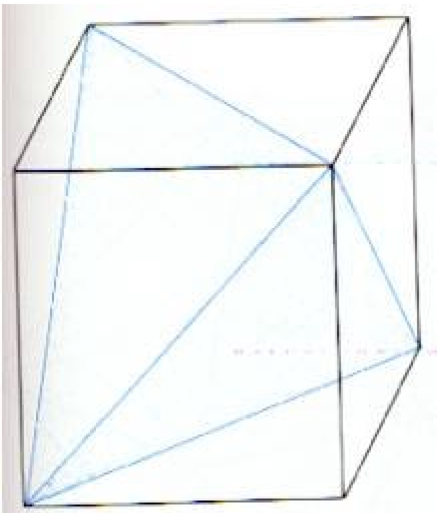
Bei diesen Körper handelt es sich um Archimedische Körper.
Sie heißen:
A Würfelstumpf
B Oktaederstumpf
C Kuboktaeder

Lernwerkstatt Mathematik **26.02.01**
Platonische und Archimedische Körper

Station 4

Als Material erhaltet ihr Styropor-Würfel mit der Kantenlänge 5 cm, Cutter-Messer (Vorsicht!!) und Folienstifte.
Mit den Cutter-Messern kann man die Styropor-Würfel glatt zerschneiden, wenn man die Klinge ganz ausfährt und hin- und herschneidet.

In den Würfel lassen sich die anderen vier Platonischen Körper einschreiben.
Stellt aus einem Würfel einen Tetraeder her!

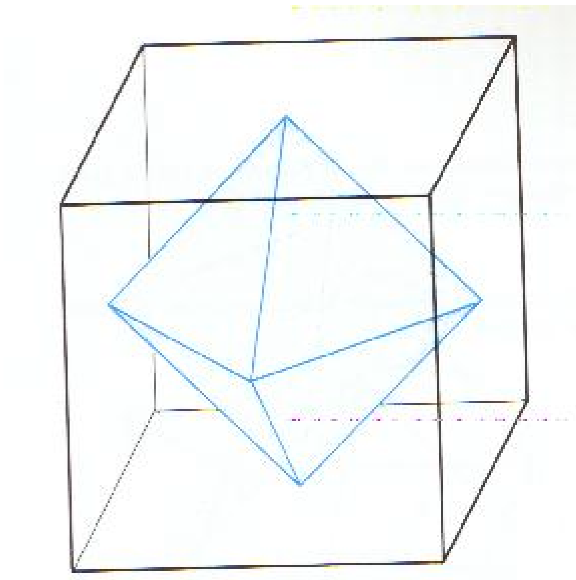


Lernwerkstatt Mathematik **26.02.01**
Platonische und Archimedische Körper

Station 5

Als Material erhaltet ihr Styropor-Würfel mit der Kantenlänge 5 cm, Cutter-Messer (Vorsicht!!) und Folienstifte.
Mit den Cutter-Messern kann man die Styropor-Würfel glatt zerschneiden, wenn man die Klinge ganz ausfährt und hin- und herschneidet.

In den Würfel lassen sich die anderen vier Platonischen Körper einschreiben.
Stellt aus einem Würfel einen Oktaeder her!



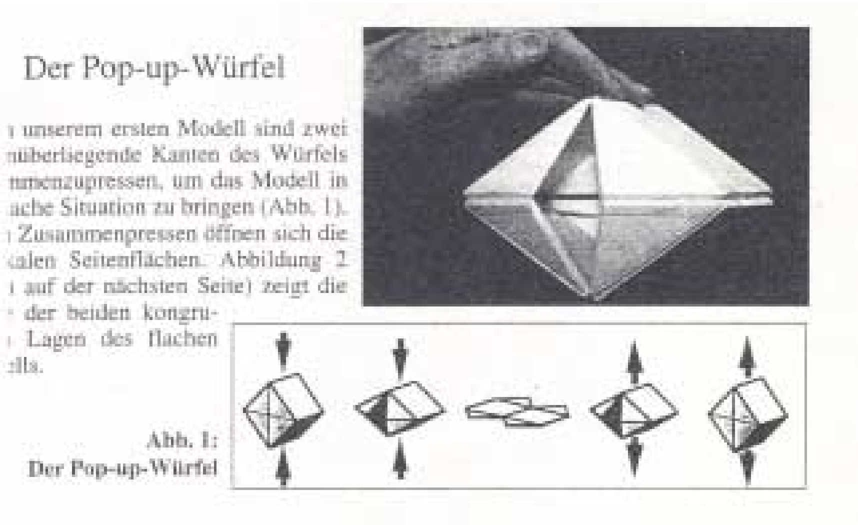
Wilfried Jannack

Pop-up-Polyeder

In dem von Peter H. Maier herausgegebenen MU-Heft zur Raumgeometrie (3-1999) hat Hans Walser einen umfangreichen Artikel über Pop-up- und Schraub-Polyeder veröffentlicht.

Damit habe ich mich einige Zeit befasst und möchte hier kurz darlegen, was daran interessant ist und warum ich mich nicht weiter damit beschäftige.

Das bestechende an Pop-ups ist, dass sie in die Ebene zusammengepresst werden können und dann aufspringen und ihre Form annehmen können. Der Mechanismus ist recht einfach: Gummibänder und aufgeschnittene Polyeder-Flächen. Als Material benutzt man laut Walser sogenannte Foamboards. Das sind beschichtete Schaumstoffplatten. Dahinter bin ich lange hergerannt und habe sie auch gekriegt. Allerdings ging es dann auch mit sog. Siebdruckkarton. Dazu braucht man außerdem Textilband für die Scharniere und Hutgummi o.ä., was im Körper angebracht später für das Aufspringen desselben sorgt.


Der Pop-up-Würfel

unserem ersten Modell sind zwei
nüberliegende Kanten des Würfels
ımmenzupressen, um das Modell in
ache Situation zu bringen (Abb. 1).
Zusammenpressen öffnen sich die
kalen Seitenflächen. Abbildung 2
auf der nächsten Seite) zeigt die
der beiden kongru-
Lagen des flachen
ells.

Abb. 1:
Der Pop-up-Würfel

Die Arbeit an so einem Pop-up dauert ca. ein bis zwei Stunden. Von meinen Polyedern ist der Würfel am besten gelungen. Beim Ikosaeder fallen die Scharniere allerdings schon etwas nach innen. Beim Dodekaeder gibt es einen ähnlichen Effekt. Gut gelungen ist auch der Oktaeder. Der Tetraeder ist eine Katastrophe. Das liegt allerdings auch daran, dass er so eine Art Drehscharniere haben muss. Die auftretenden Probleme liegen z.T. daran, dass in den einzelnen Körpern unterschiedliche Spannungen auf dem Gummiband liegen müssen. Ein weiteres Problem macht das Textilband, das bei Wärmeeinwirkung langsam seinen Platz verlässt.
Für jemanden, der das besser hinkriegt sind die Dinger also durchaus zu empfehlen.
Dann kann man sozusagen vor der Klasse die fünf Körper aus einer Mappe herauszaubern. Pop-ups sind also sehr platzsparend. Wenn dann allerdings die Außenflächen nach innen knicken wird man maximal eine Lacherfolgsnummer landen können.

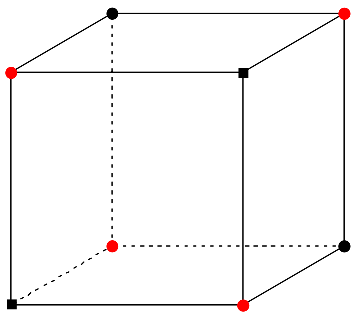
Zeichnerische Darstellung der Platonischen Körper

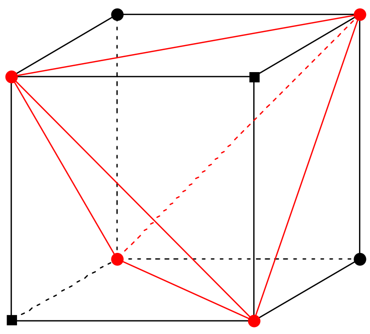
1. Einleitung

Schrägbilder lassen bei der Projektion räumlicher Gebilde auf die Zeichenebene den Körpercharakter am geeignetesten vorstellbar werden. Zur räumlichen Darstellung werden die unsichtbaren Kanten gestrichelt gezeichnet. Die in die Tiefe gerichteten Kanten können in einem Winkel von $\varphi = 30°, 45°$ oder 60° dargestellt werden, dabei ist die perspektivische Verzerrung gering, wenn diese Kanten mit dem Faktor k = $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}$ verkürzt werden.
Am einfachsten ist das Schrägbild des Würfels (Hexaeder) auf Grund der rechten Winkel und gehört bereits zum Stoffplan des 5. Jahrgangs. Die Schrägbilder aller übrigen Platonischen Körper lassen sich aus dem des Würfels konstruieren. Reizvoll daran ist, dass neben der Anwendung vieler Grundkonstruktionen aus der Geometrie der Sek I der Goldene Schnitt thematisiert werden kann.

2. Der Tetraeder

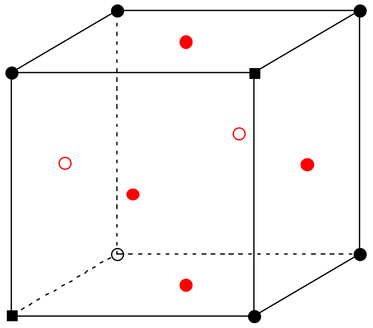
Jede zweite Ecke des Würfels ist Eckpunkt des Tetraeders.
Sechs Diagonalen der Würfelflächen bilden seine Kanten.

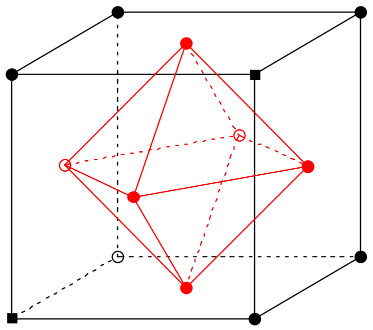




3. Der Oktaeder

Die Mittelpunkte der sechs Würfelflächen bilden die Eckpunkte des Oktaeders. Dabei werden die Mittelpunkte der Seitenflächen zu Eckpunkten der Grundfläche, die beiden übrigen Mittelpunkte zu den Spitzen des Oktaeders.



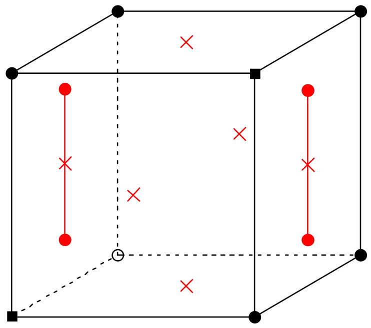


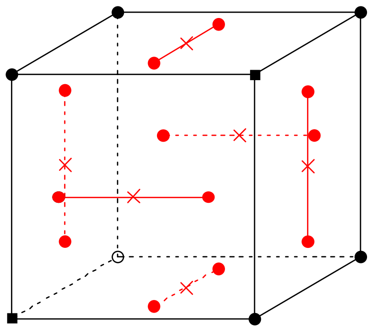
4. Der Ikosaeder

Da der Ikosaeder nur zwölf Eckpunkte hat und sich die Konstruktion der zwanzig Eckpunkte des Dodekaeders darauf aufbauen lässt, wird zunächst die Entstehung seines Schrägbildes erklärt.
Die Mittelpunkte der sechs Würfelflächen bilden die Mitten von sechs Strecken, die parallel zu jeweils einer Würfelkante verlaufen und der Länge des Majors M der Würfelkante a nach dem Goldenen Schnitt (a : M = M : m) entsprechen.

$$\Rightarrow M = a \cdot \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right) \approx a \cdot 0{,}618$$

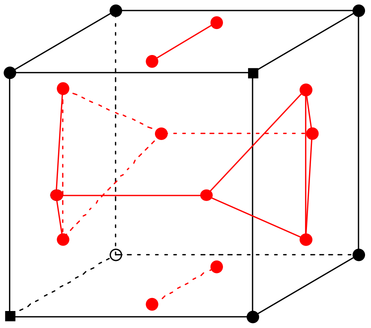
Bei diesen sechs Strecken ist darauf zu achten, dass gegenüberliegende Strecken parallel sind und die Paare alle drei räumlichen Richtungen ergeben.

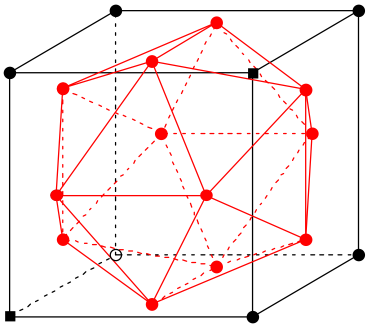




Die Endpunkte der sechs Strecken bilden die zwölf Eckpunkte des Ikosaeders. Jeweils drei benachbarte Eckpunkte erzeugen eine dreieckige Seitenfläche. Dabei ist es nicht so einfach, den

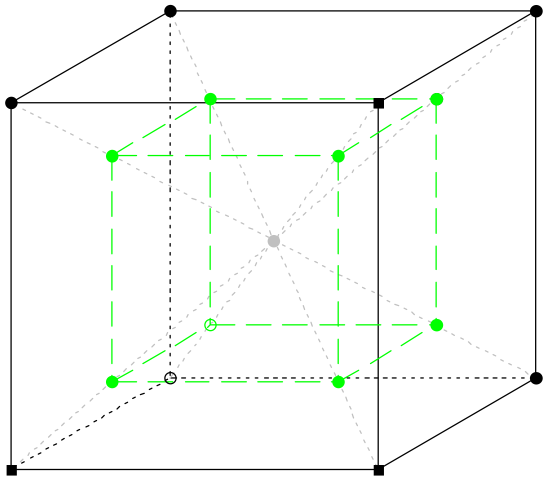
Überblick bei den 30 Kanten des Ikosaeders zu behalten (zur Kontrolle: in jedem Eckpunkt müssen sich fünf Kanten treffen). Auch die Identifizierung der unsichtbaren Kanten erfordert einiges an räumlichem Vorstellungsvermögen.





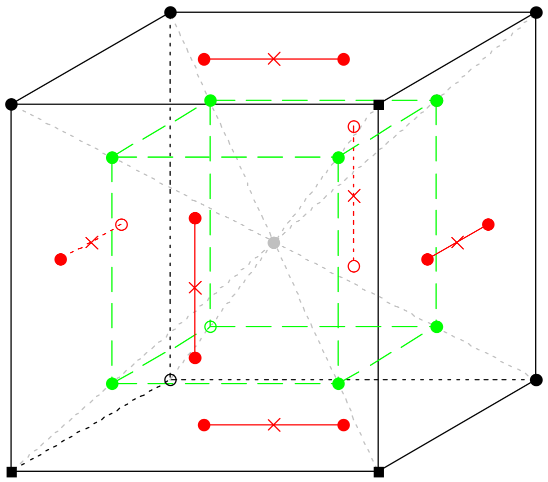
5. Der Dodekaeder

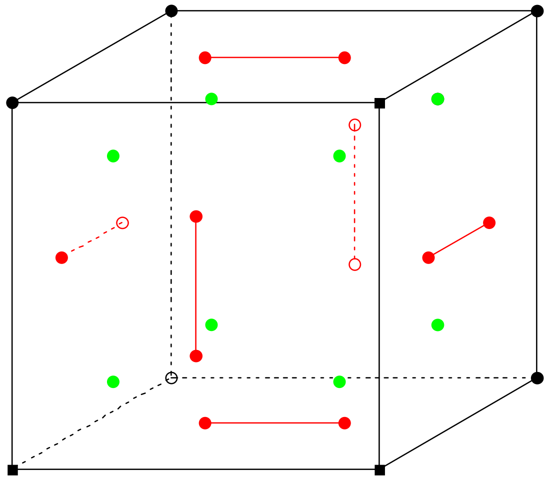
Zunächst wird für das Schrägbild des Dodekaeders in den vorhandenen Würfel konzentrisch ein kleinerer Würfel gezeichnet mit der Kantenlänge M, also dem Major von a. Am einfachsten kann dieser Würfel konstruiert werden, indem man die vier Raumdiagonalen einzeichnet, vom Würfelmittelpunkt als Zentrum nach den Strahlensätzen den Major einer Diagonalenhälfte bestimmt und über Parallelverschiebungen die übrigen Punkte festlegt.



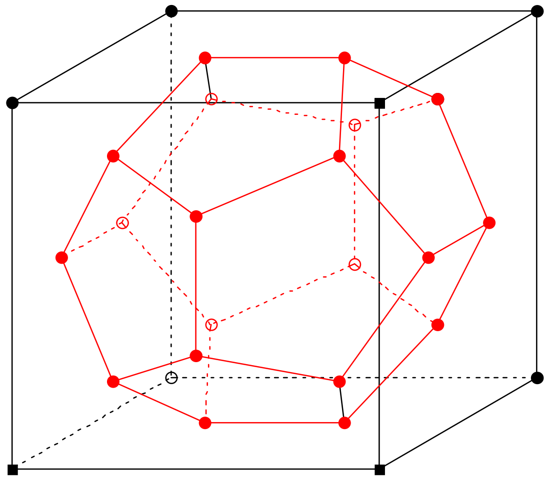
Mit den Eckpunkten dieses innenliegenden Würfels sind acht Dodekaederpunkte festgelegt. Die übrigen zwölf werden ähnlich wie beim Ikosaeder mit sechs parallelen Strecken zu den Würfelkanten durch die Mittelpunkte der Flächen konstruiert. Die Länge dieser Strecken entspricht dem Minor m der Würfelkante a, also:

$$m = a - M = a \cdot \tfrac{1}{2}(3 - \sqrt{5}) \approx 0{,}382 \cdot a$$





Nun müssen die Kanten des Dodekaeders gezeichnet werden, indem jeder Eckpunkt mit drei benachbarten Punkten verbunden wird, sodass jeweils Fünfecke entstehen.



Dynamische – perspektivische Konstruktionen:

Wie der Beitrag von Heiner Henjes Kunst zeigt, lassen sich die Platonischen Körper ausgehend vom Würfel konstruieren. Einen besonderen Reiz bieten dynamische Konstruktionen. Diese werden mit einem dynamischen Geometrie Programm durchgeführt. Ich bevorzuge das Programm DynaGeo Euklid von Roland Mechling.

Dynamisch bedeutet in diesem Fall zum Beispiel, dass ein konstruierter Würfel gedreht werden kann. Dadurch wird die Konstruktion an Seitenflächen dieses Würfels zum Teil einfacher.

Es gibt einige Regeln, die beim Einsatz eines dynamischen Geometrie Programm beachtet werden sollten. Wer sich hiermit intensiver beschäftigen will, dem sei meine Internetseite empfohlen.

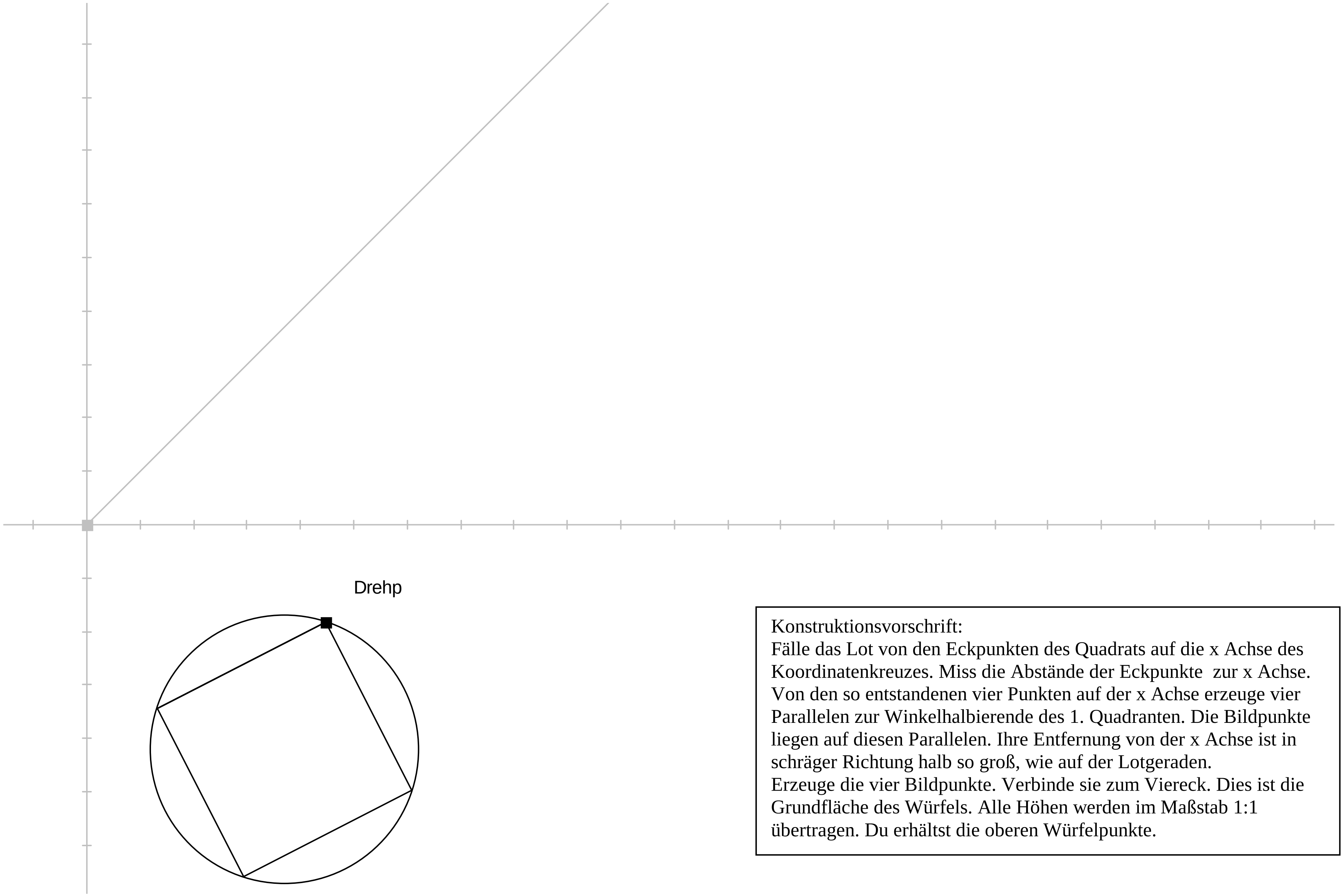
www.erz.uni-hannover.de/idmi/koepsell/start.html

Auf dieser Seite sind die im Folgenden beschriebenen Konstruktionen zu betrachten. Sie sind beweglich und können dynamisch verändert werden. Aber leider funktioniert dies nur mit dem **Internet Explorer** von **Microsoft**; aber auch mit **Staroffice**. (Ich habe nicht geglaubt, dass ich als Linux Fan so etwas mal schreiben werde.)

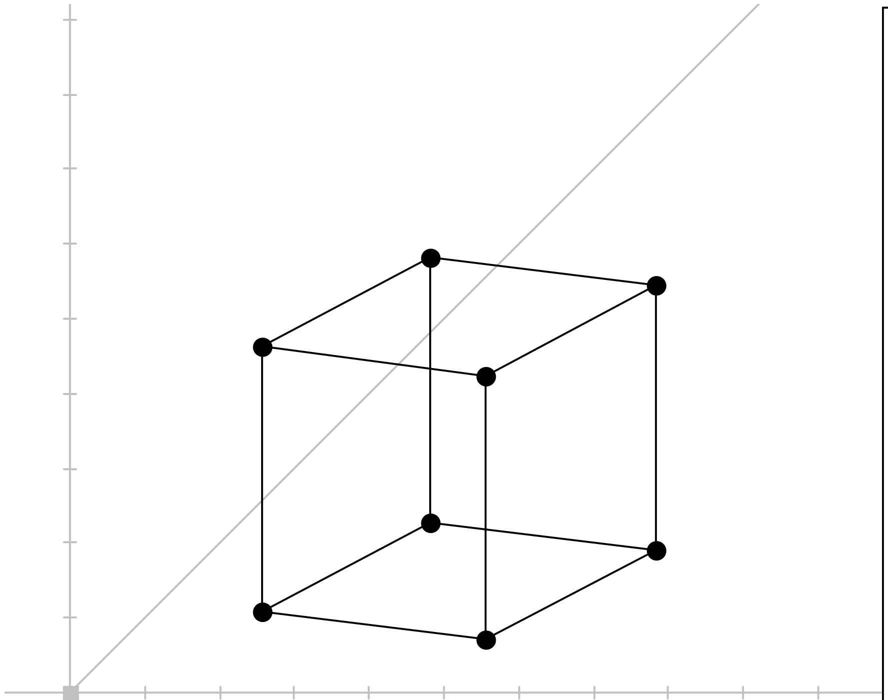
Die folgenden sieben Seiten im Querformat sind Arbeitsblätter, die man auf DinA3 hoch kopieren sollte. Meiner Meinung nach sollte jeder Schüler die Konstruktion mit den gewohnten geometrischen Hilfsmitteln durchführen, bevor er / sie sich an die dynamische Konstruktion wagt. Die geometrischen Eigenschaften der Konstruktion werden dadurch deutlicher.

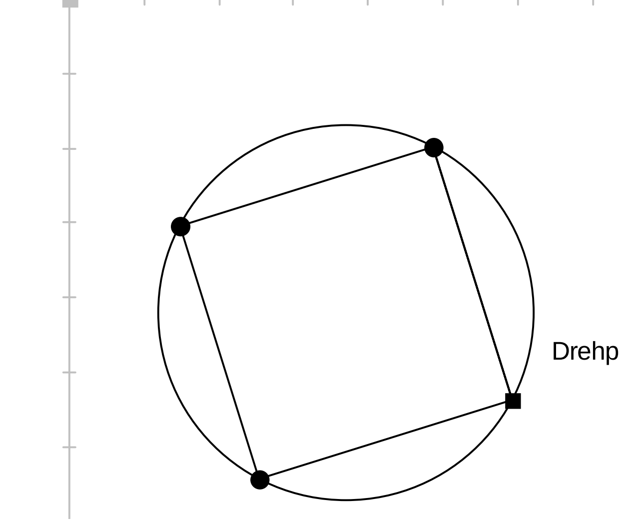
Das gleiche gilt für Fortbildungen von Lehrerinnen / Lehrern und Studenten. Es geht in erster Linie immer um die Vermittlung geometrischer Kenntnisse und nur am Rand um programmtechnische Fähigkeiten

Andreas Koepsell



Konstruktionsvorschrift:
Fälle das Lot von den Eckpunkten des Quadrats auf die x Achse des Koordinatenkreuzes. Miss die Abstände der Eckpunkte zur x Achse. Von den so entstandenen vier Punkten auf der x Achse erzeuge vier Parallelen zur Winkelhalbierende des 1. Quadranten. Die Bildpunkte liegen auf diesen Parallelen. Ihre Entfernung von der x Achse ist in schräger Richtung halb so groß, wie auf der Lotgeraden.
Erzeuge die vier Bildpunkte. Verbinde sie zum Viereck. Dies ist die Grundfläche des Würfels. Alle Höhen werden im Maßstab 1:1 übertragen. Du erhältst die oberen Würfelpunkte.

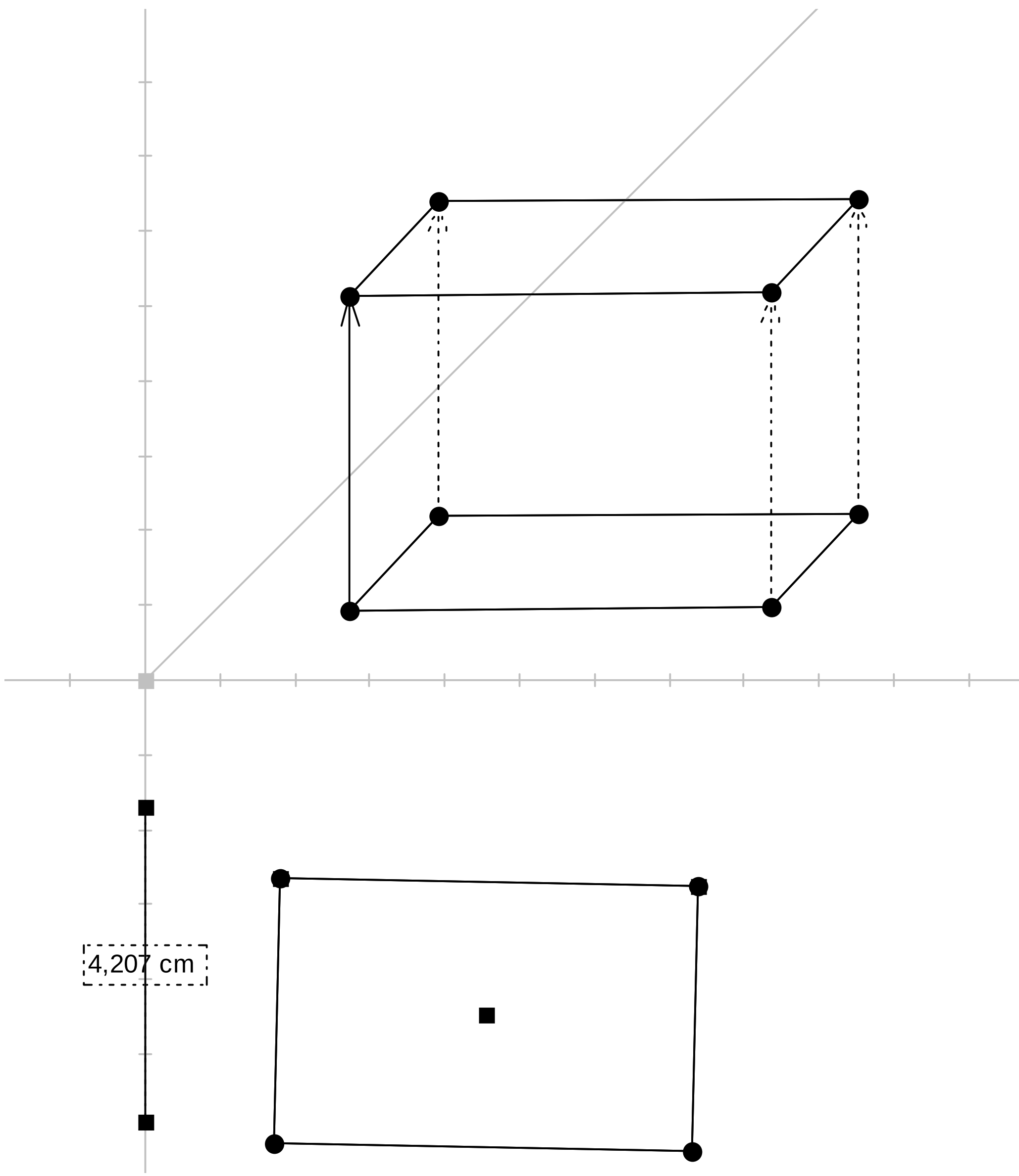




Dynamische Konstruktion:

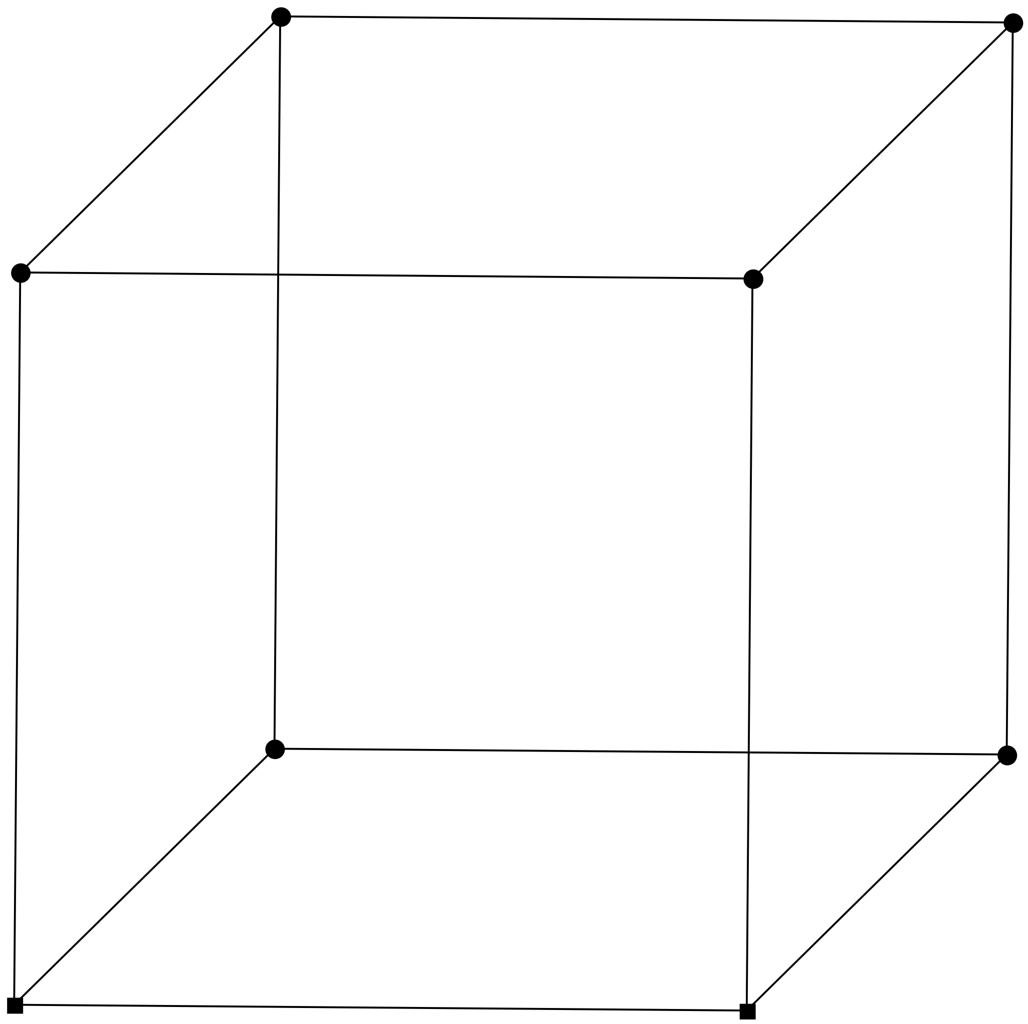
Wird diese Zeichnung mit Euklid erzeugt, so ist sie dynamisch. Der Würfel kann durch Drehen des Basispunktes „Drehpunkt“ gedreht werden. Dadurch dass der Kreis, in dem das Quadrat liegt, vergrößert oder verkleinert werden kann, ist der Würfel auch in seinen äußeren Abmessungen veränderbar.
Gehe folgendermaßen vor:

- Sichtbar machen des Koordinatenkreuz (im Ordner Messen); erzeugen einer Winkelhalbierenden. Dazu muss man zunächst Punkte auf die x und y Achse setzen.
- Konstruktion des Kreises mit einbeschriebenem Quadrat. (Erzeugen eines Kreises durch zwei Punkte, einen Eckpunkt auf die Kreislinie setzen – „Punkt auf eine Linie“ -, eine Durchmesser konstruieren und den gegenüberliegenden Eckpunkt setzen; im Kreismittelpunkt eine Lotgerade erreichten und die beiden anderen Eckpunkte erzeugen.
- Ein Quadrat im Kreis erzeugen und die überflüssigen Konstruktionselemente verstecken (Mauszeiger auf das Element bewegen und die rechte Maustaste betätigen).
- Einen Bildpunkt erzeugen: Lotgerade von Urpunkt auf die x Achse fällen. Den Schnittpunkt dieser Lotgerade mit der x Achse erzeugen. Den Abstand der beiden Punkte messen. Nun das Werkzeug „Kreis mit bestimmten Radius“ aufrufen. Als Radius wird die gemessene Entfernung eingegeben und durch zwei geteilt. [d(P1,P4)/2] Der Kreis wird im Schnittpunkt der Lotgerade mit der x Achse erzeugt. In diesem Schnittpunkt wird eine Parallele zur Winkelhalbierende erzeugt. Der Bildpunkt des Kreises mit der Parallele zur Winkelhalbierenden ist der erste Bildpunkt.
- Alle überflüssigen Konstruktionselemente löschen. Zur Makro definieren, die den Bildpunkt automatisch erzeugt: Die Startobjekte sind: Urpunkt, x Achse und die Winkelhalbierende. Das Zielobjekt ist der Bildpunkt. Das Makro wird benannt. Nun wird das Makro aufgerufen und die drei anderen Bildpunkte erzeugt.
- In jedem Bildpunkt wird eine Lotgerade zur x Achse errichtet. Die Seitenlänge des Quadrats im Kreis wird gemessen. Über den Befehl „Kreis mit bestimmten Radius“ wird diese Entfernung auf die Lotgerade übertragen und ein oberer Eckpunkt des Würfels erzeugt.
- Das Würfelbild wird fertiggestellt.



Perspektivische Ansicht eines Quaders:

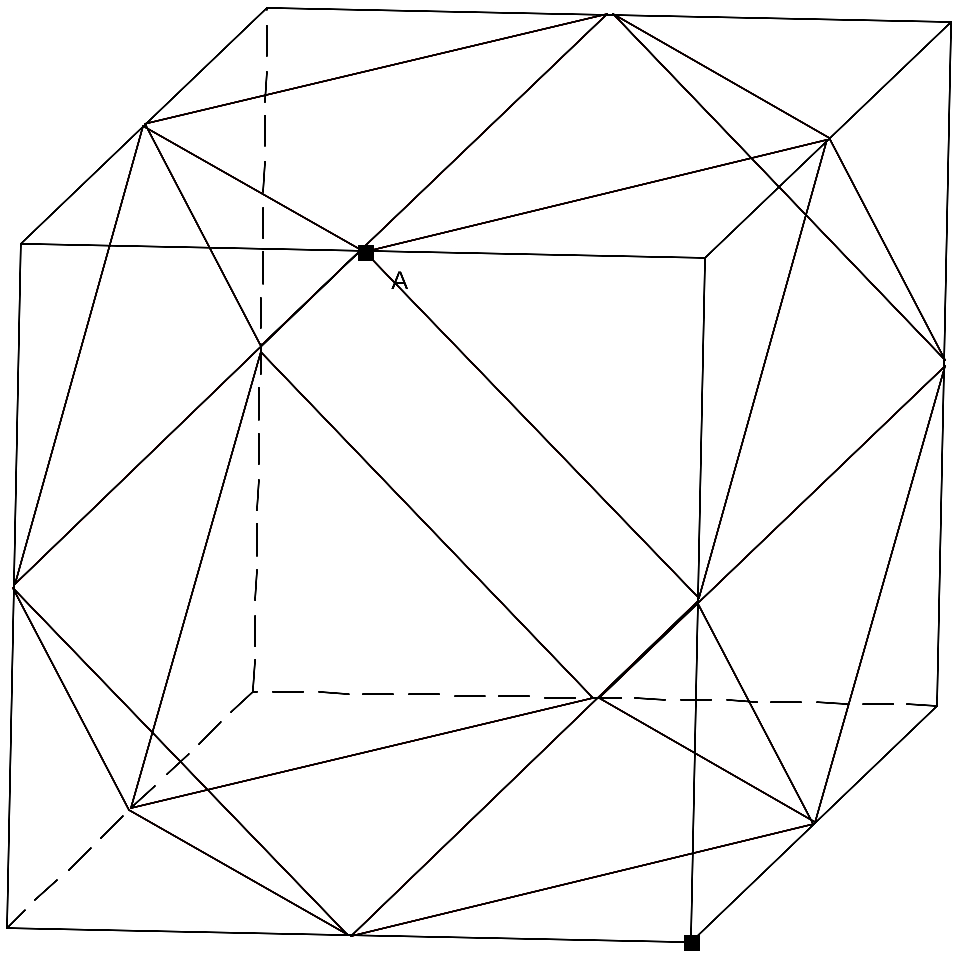
In ähnlicher Weise lässt sich nun die perspektivische Ansicht eines Quaders konstruieren. Dabei benutzen wir in der gleichen Weise das Koordinatenkreuz und die Winkelhalbierende im 1. Quadranten.
Die Ausgangsfigur ist ein beliebiges Rechteck. Die Höhe wird als Entfernung auf der y Achse abgetragen. Das Makro, das in der oberen Zeichnung definiert wurde, kann in gleicher Weise verwendet werden.



Archimedische Körper:

Gegeben ist ein Würfel. Von diesem Würfel soll eine Ecke abgeschnitten werden. Die Schnittfläche ist ein gleichseitiges Dreieck.

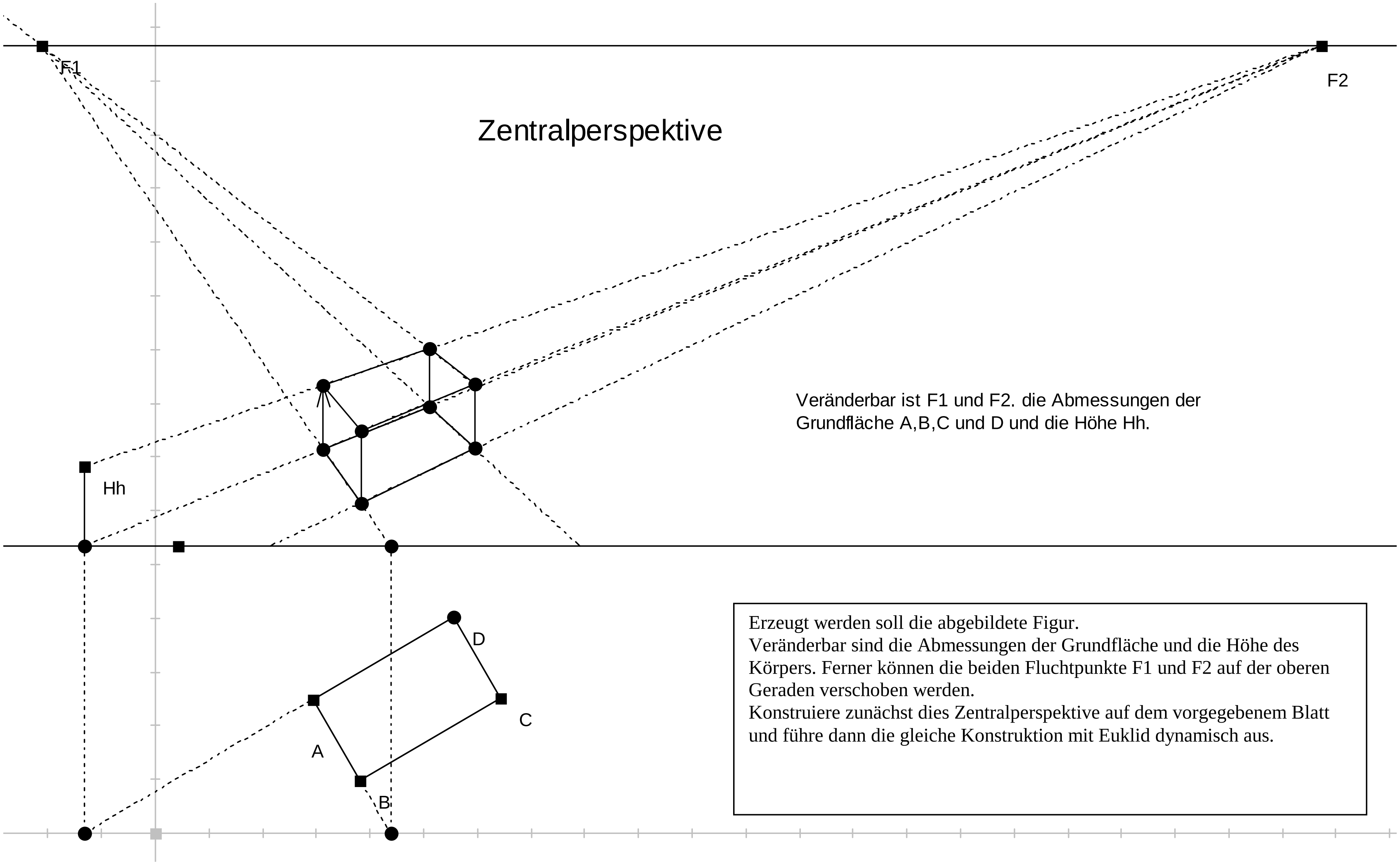
- Schneide bitte eine Ecke ab und konstruiere die Schnittfläche.
- Nun soll durch das Abschneiden der Ecke an zwei bestimmten möglichen Stellen ein archimedischer Körper erzeugt werden. Ein archimedischer Körper hat als Begrenzungsflächen regelmäßige N – Ecke.
- Erzeuge einen archimedischen Körper durch das richtige Abschneiden.



Danamischer Schnittkörper:

Nun soll dieser Schnittkörper dynamisch erzeugt werden. Der Eckpunkt A befindet sich auf der vorderen, oberen Würfelkante und kann dort frei bewegt werden. Von diesem Punkt aus misst man die Entfernung zum Eckpunkt rechts oben. Über den Befehl „Kreis mit einem bestimmten Radius“ wird die Entfernung nach unten übertragen. Auf der schräg nach hinten verlaufenden Kante ist die gemessene Entfernung halb so groß..
Alle Ecken werden in gleicher Weise abgeschnitten und sind von der Bewegung des Eckpunktes A abhängig.
Bewege den Eckpunkt A in die gegenüberliegende Ecke. Welcher Körper wird erzeugt?

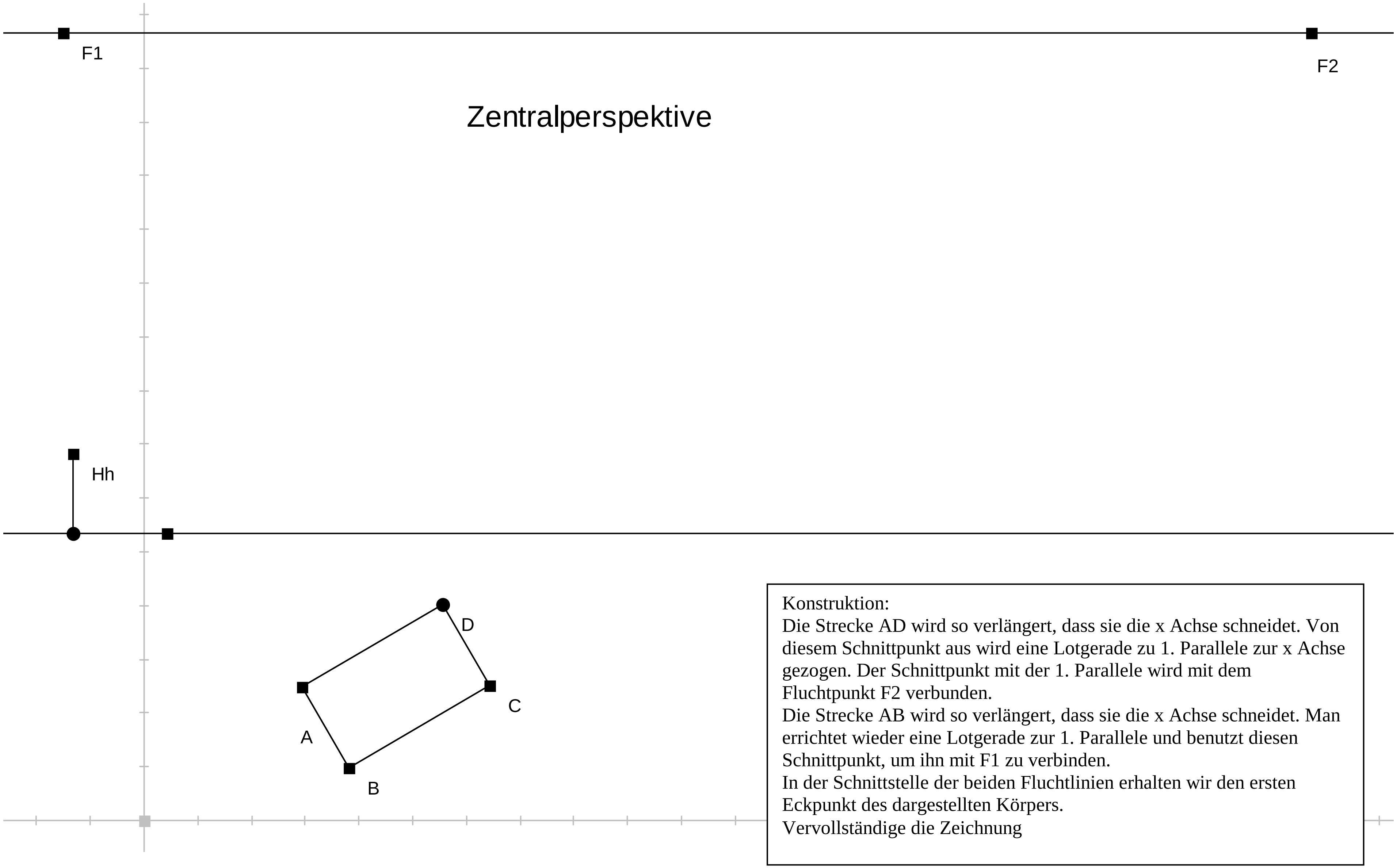
Zentralperspektive



Veränderbar ist F1 und F2. die Abmessungen der Grundfläche A,B,C und D und die Höhe Hh.

Erzeugt werden soll die abgebildete Figur.
Veränderbar sind die Abmessungen der Grundfläche und die Höhe des Körpers. Ferner können die beiden Fluchtpunkte F1 und F2 auf der oberen Geraden verschoben werden.
Konstruiere zunächst dies Zentralperspektive auf dem vorgegebenem Blatt und führe dann die gleiche Konstruktion mit Euklid dynamisch aus.

Zentralperspektive



Konstruktion:
Die Strecke AD wird so verlängert, dass sie die x Achse schneidet. Von diesem Schnittpunkt aus wird eine Lotgerade zu 1. Parallele zur x Achse gezogen. Der Schnittpunkt mit der 1. Parallele wird mit dem Fluchtpunkt F2 verbunden.
Die Strecke AB wird so verlängert, dass sie die x Achse schneidet. Man errichtet wieder eine Lotgerade zur 1. Parallele und benutzt diesen Schnittpunkt, um ihn mit F1 zu verbinden.
In der Schnittstelle der beiden Fluchtlinien erhalten wir den ersten Eckpunkt des dargestellten Körpers.
Vervollständige die Zeichnung

Das Falten von Körpern und das Zeichnen von Netzen

Handlungsorientiertes Lernen durch das Bauen von Körpern fördert die ganzheitliche Wahrnehmung im Geometrieunterricht.

Tätigkeiten wie Falten, Schneiden oder Kleben sprechen andere Sinne an als Rechnen und Zeichnen. Beim Falten etwa werden wichtige geometrische Eigenschaften (Symmetrie) direkter erfahren als beim Zeichnen. Die Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens, die im Mathematikunterricht der Sekundarstufe1 ab der Klasse 7 sonst eher ein Schattendasein führt, wird gefördert. Außerdem erfordert die Arbeit mit Papier Geduld, Genauigkeit und Durchhaltevermögen.

„Basteln" im Mathematikunterricht ist also sinnvoll eingesetzte Lernzeit.

Das Material Papier ist zudem leicht verfügbar, und es kann farbig gestaltet werden.

Falten von Körpern

Körper lassen sich aus einem Stück falten, aus einzelnen Streifen flechten oder aus Faltteilen zusammenstecken. Für den Schüler ist es leichter, einen Körper nachzubauen, wenn er ihn sichtbar vor sich hat.

Am selbstgebauten fertigen Körper kann jeder Schüler seine eigenen Untersuchungen und Messungen durchführen. Er kann Flächen, Kanten und Ecken abzählen, Symmetrieebenen finden, mit Hilfsmitteln Raumdiagonalen und Höhen sichtbar machen, topologische Untersuchungen zu Wegen und Flächenfärbungen durchführen. Beim Auseinanderfalten lassen sich Faltlinien nach Kriterien wie innen, außen, Flächenlinie, Kantenlinie ordnen.

Zeichnen von Netzen

Die Schüler können fertigen Körpern Netze zuordnen - oder Netze von vorliegenden Körpern konstruieren. Am Beispiel „Würfel aus 3 Pyramiden" erkennt man bei der Netzkonstruktion deutlich die Flächen- und die Raumdiagonale des Würfels. Netzkonstruktionen erfordern einige geometrische Grundkenntnisse.

Bei Faltübungen bzw. Netzkonstruktionen können durch unterschiedliche Vorgaben auch unterschiedliche Schwierigkeitsstufen aufgebaut werden, was die Binnendifferenzierung unterstützt. So werden jedem Schüler - seinen individuellen Vorraussetzungen gemäß - spezifische Erfolgserlebnisse ermöglicht.

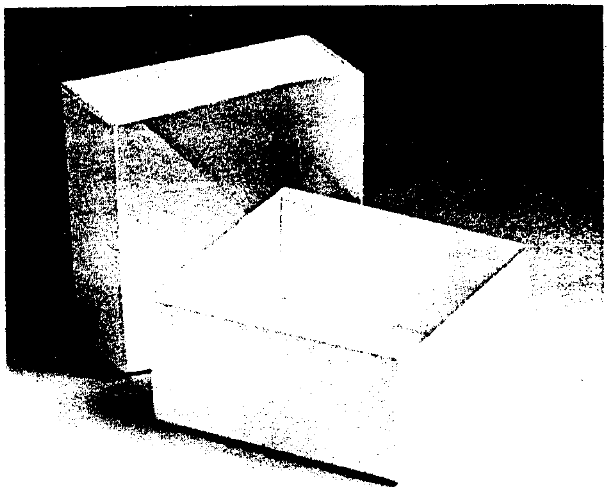
Literatur

G. A. Lörcher: „Platonische Körper falten" in MU – 3 – 1999
und „Räumliches Vorstellungsvermögen im Geometrieunterricht"
in Praxis Schule 3/96

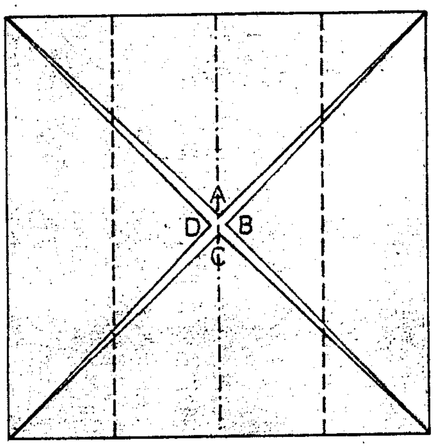
Hinweis: Origami-Bücher bieten viele Ideen und Anleitungen für Faltarbeiten!

Marita Rondhuis-Aumann

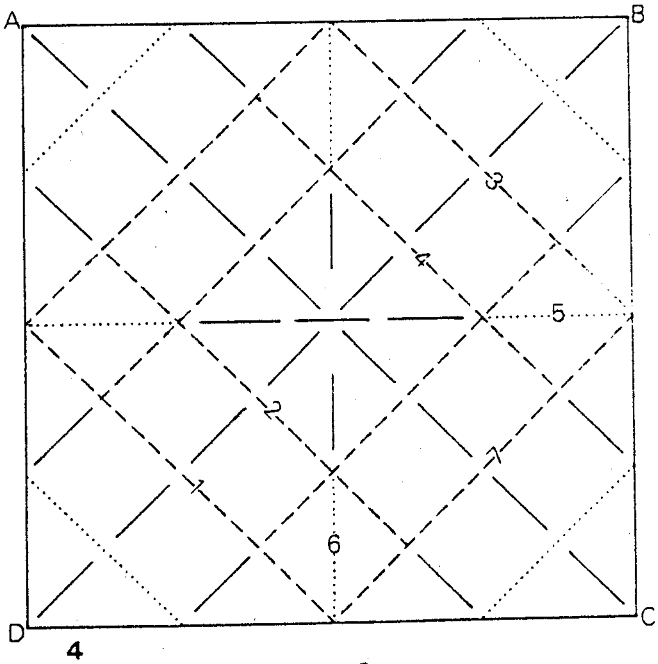
Viereckige Schachtel



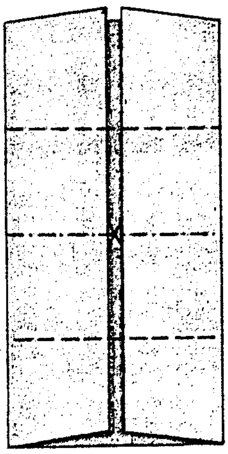
1 Mittelbruch knicken. Talfalten in den gestrichelten Linien.
2 Mittelbruch knicken. Talfalten in den gestrichelten Linien.
3 Alle Falten öffnen.
4 Die Ecken B und D in den Linien 1 und 3 an den Mittelbruch falten. In den Linien 2 und 4 hochfalten. Dadurch ergeben sich die bei Ecke B und D eingezeichneten Bergfalten. Bergfalten in den Linien 5 und 6. Ecke C in der Talfalte 7 darüberklappen. Mit Ecke A wiederholen.



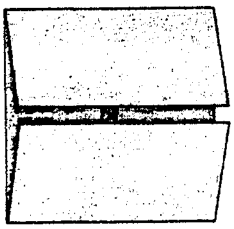
1



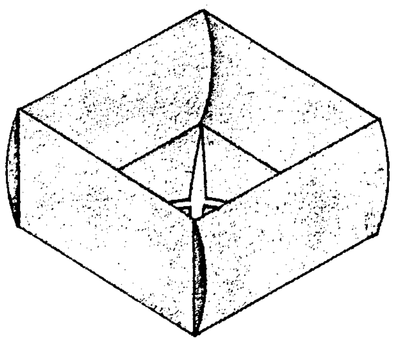
4



2



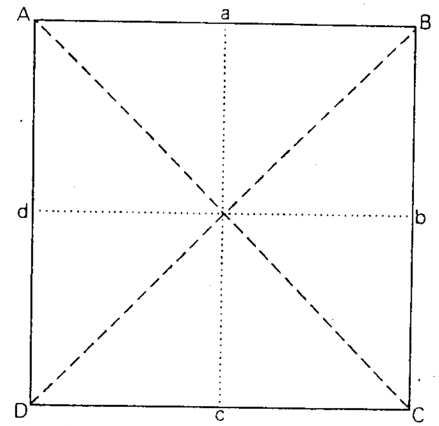
3



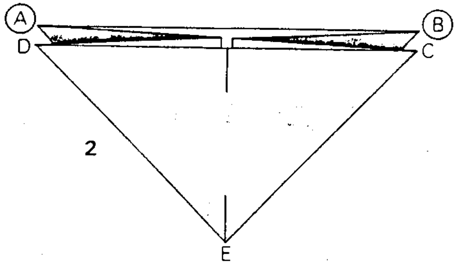
Grundform 5

Ausgang: Quadratisches Faltblatt, Farbseite hinten

1 Talfalten in den Diagonalen. Bergfalten in den Mittelbrüchen. Öffnen. Die Punkte b und d auf Punkt a ziehen, dadurch fällt auch Punkt c auf Punkt a.
2 Grundform 5.



1



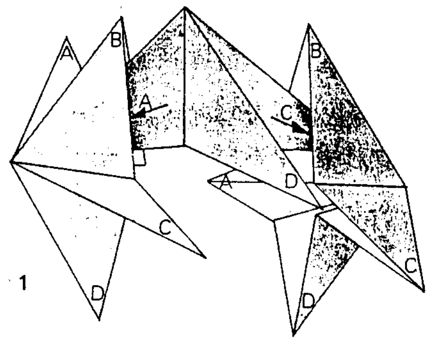
2

Diese Grundform nennt man bei uns oft das Fliegerdreieck, weil aus ihr die bekannte Faltfigur „Flieger", auch „Schwalbe" genannt, entsteht. An ihr fallen uns sofort die vier Endpunkte A, B, C und D auf, die vom Zentralpunkt E und dem Mittelbruch fortstreben. Diese vier Endpunkte finden wir in den vier Blütenblättern des Enzians, den Flügeln des Schmetterlings und den Füßen des Frosches wieder. Die Spitze E wird im allgemeinen als Kopf oder Kelchspitze den Mittelpunkt der Figur bilden. Die breite Ausladung der Endpunktspitzen macht diese Grundform als Ausgangspunkt für Flugmodelle und Windgleiter besonders geeignet.
Wichtig ist bei ihr außerdem die Tütenbildung, die schon auf die Möglichkeit einer Hohlraumgestaltung hinweist. Ein Beispiel dafür ist der Würfel, bei dem durch das Zusammenfügen der Endpunktspitzen der Hohlraum geschlossen wurde. Eine Kombination von Hohlraumbildung und Endpunktfaltung stellen Figuren wie die Enzianblüte und der Frosch dar. Durch die zweifache Gestaltungsmöglichkeit bietet diese Grundform einen guten Ansatz für eigene schöpferische Versuche.

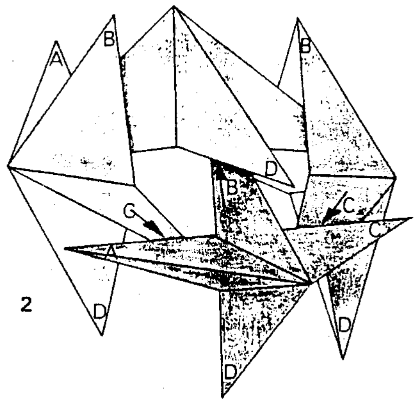
Ampel

Ausgang: Grundform 5

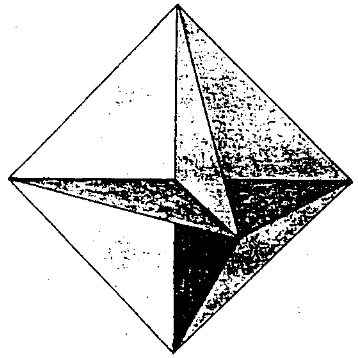
1 Die Grundform sechsmal in verschiedenen Farben falten. Alle Figuren drehen und die vier Spitzen im rechten Winkel zur Mittelachse stellen.
Die Spitzen A und C einer Figur jeweils in die Spitzen B von zwei weiteren Figuren stecken.
2 Die Spitze B von Figur 4 in die Spitze D von Figur 1 stecken. Gleichzeitig die Spitzen C von Figur 2 und 3 in Spitze A und C von Figur 4 schieben. Figur 5 und 6 in gleicher Weise anfügen. Von jeder gefalteten Grundform liegen zwei gegenüberliegende Spitzen innen und zwei außen.

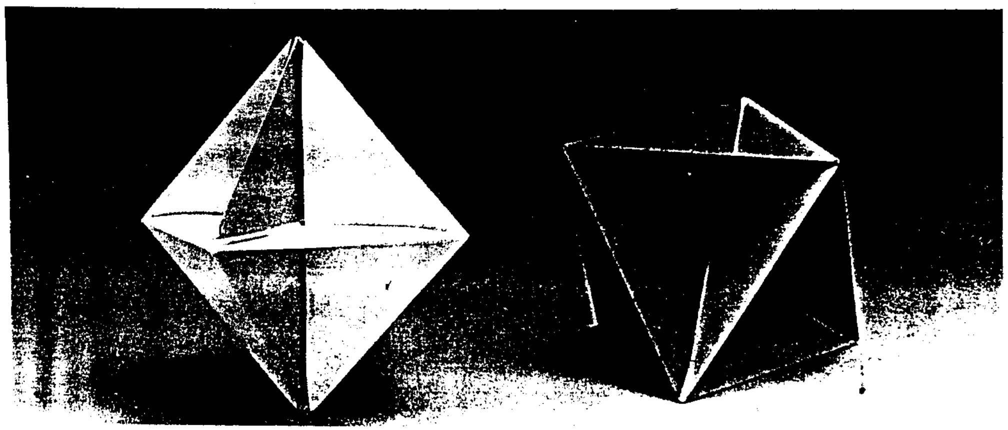


1

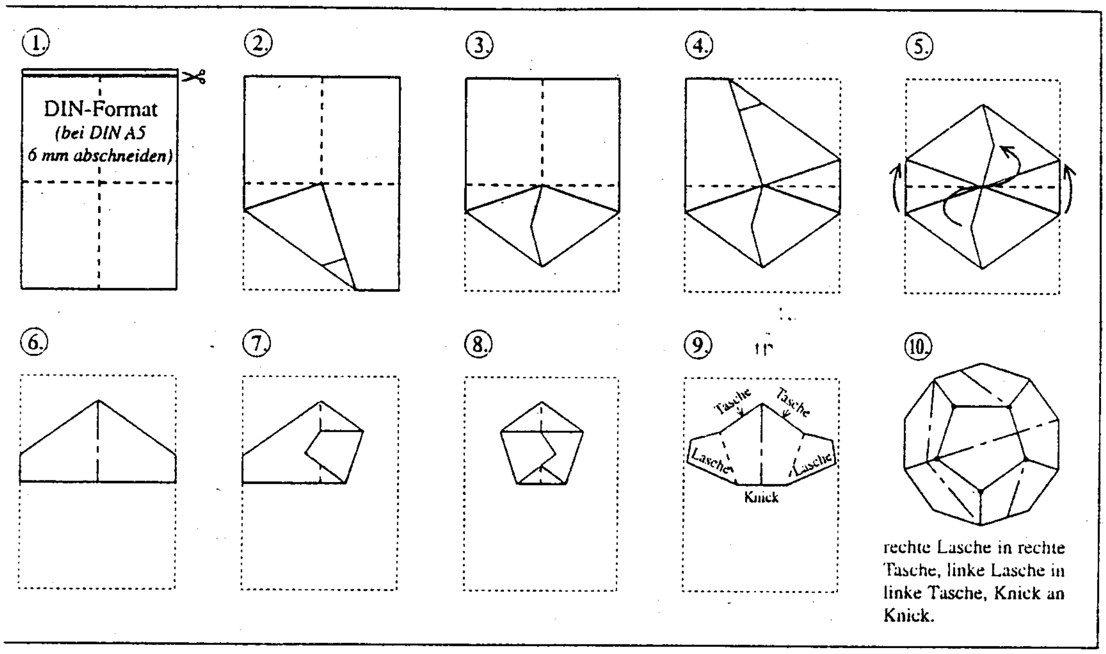


2





Dodekaeder aus 12 Blättern



Nach Abschneiden des Randstreifens faltet man die waagerechte und senkrechte Mittellinie (Schritt 1). Danach faltet man eine Ecke auf die Mitte (2). Dann faltet man die danebenliegende Ecke auf die Mitte (3). Dann geht man in der gleichen Richtung weiter und faltet die beiden restlichen Ecken auf die Mitte (4, 5).

Dadurch hat man unten und oben zwei Lagen, die man ineinander einhängen kann (6).

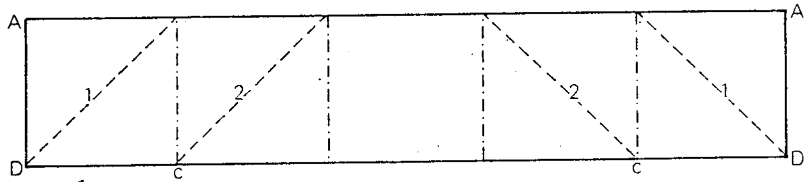
Anschließend faltet man die beiden Endpunkte des Daches so auf die Mittellinie, dass die umgefaltete Dachkante senkrecht zur Mittellinie und parallel zur Grundkante verläuft (7, 8). Dadurch hat man ein regelmäßiges Fünfeck mit 2 Taschen, 2 Laschen und einem Knick (9).

Aus 12 Fünfecken erhält man das Dodekaeder, wenn man jeweils linke Lasche in linke Tasche, rechte Lasche in rechte Tasche und Knick an Knick steckt.

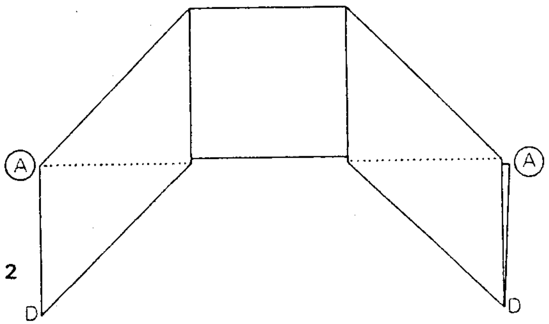
Zauberkasten

Ausgang: Sechs möglichst verschiedenfarbige Rechtecke in der Größe 1:5 + 1 mm Spielraum pro Teilquadrat. Beträgt die Breite z. B. 10 cm, so müssen die Rechtecke 50,5 cm lang sein.

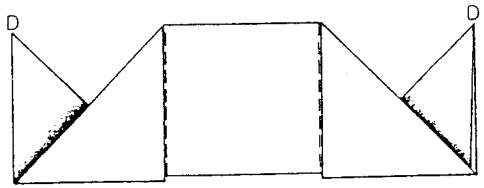
1 Die Rechtecke in 5 gleich große Teile knicken. Talfalten in den gestrichelten Linien 1 und 2.
2 Bergfalten in den punktierten Linien.
3 Die Seitenteile in den gestrichelten Linien hochfalten.
4 Zwei gefaltete Rechtecke zusammenfügen. Dabei jeweils die Ecken D hinter die Teile b schieben.
5 Zwei weitere Rechtecke in gleicher Weise zusammenstecken. Die beiden fertigen Teile so ineinanderschieben, daß alle gefalteten Seiten sichtbar sind.
6 Die beiden restlichen Rechtecke falten und in den Würfel einschieben. Bei einem Teil müssen die Spitzen D nach oben weisen, beim zweiten nach unten. Nach dem Einschieben liegen die Spitzen D neben den glatten Flächen des Würfels.
7 Die eingeschobenen Teile vorn und hinten schließen.
8 Der fertige Würfel hat auf allen Seiten doppelte Wände und ist nur zu öffnen, wenn er ganz entfaltet wird.



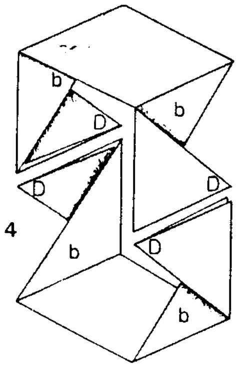
1



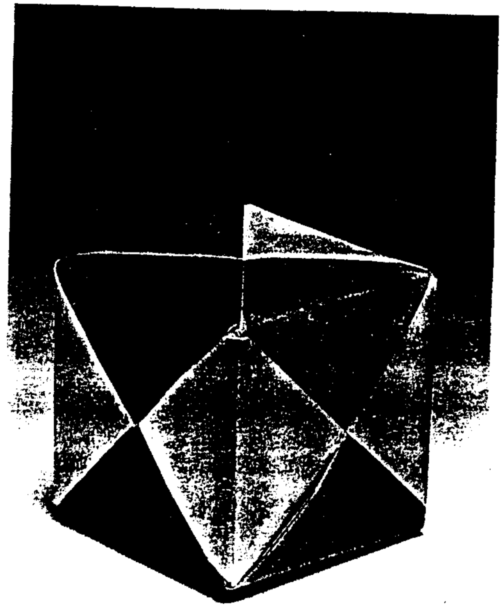
2

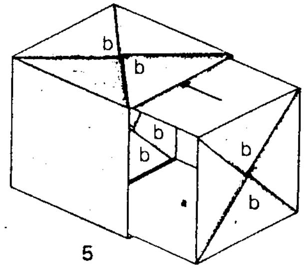


3

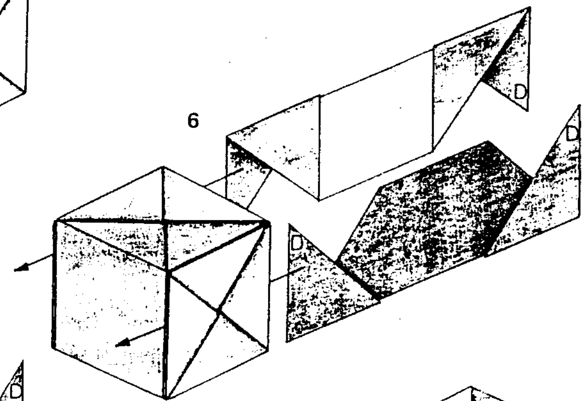


4

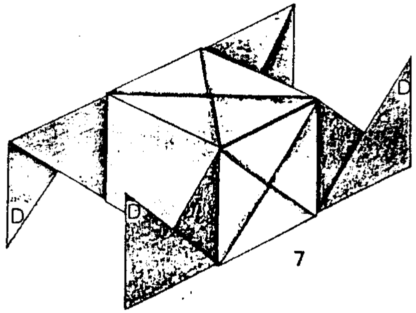




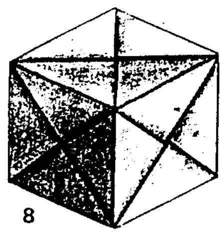
5



6



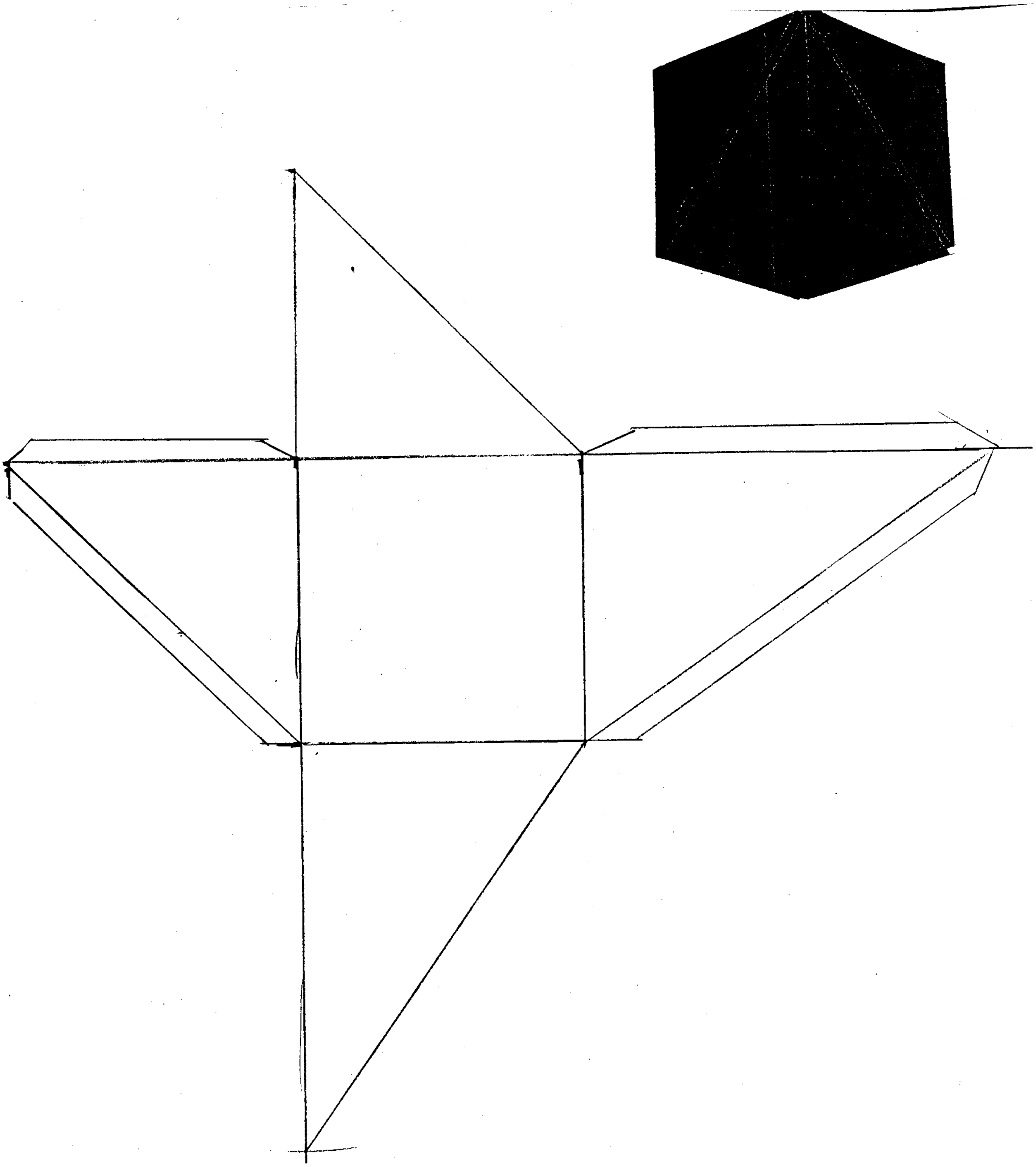
7



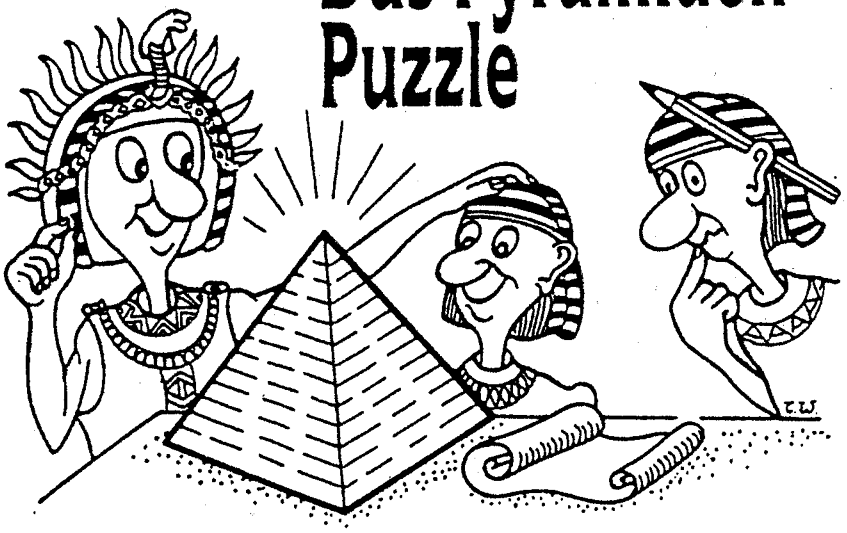
8

Der Würfel aus 3 Pyramiden

Vorlage für das Netz der Pyramiden mit quadratischer Grundfläche



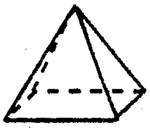
Das Pyramiden-Puzzle



Der Sonnenkönig Echnaton hatte einen Architektenwettbewerb ausgeschrieben, weil er sich ein würdiges Grabmal errichten lassen wollte. Es kamen die unterschiedlichsten Entwürfe, einer komplizierter als der andere. In seiner Verzweiflung rief Echnaton aus: "Hat denn niemand eine klare, einfache Form für mich, spitz wie ein Zelt, glatt wie ein Fels und haltbar, wenigstens die nächsten 5000 Jahre?!" Da trat ein junger Knabe mit zwei Holzstückchen hervor und zeigte dem König die Form, von der dieser träumte. Bei den Fortschritten der heutigen Baukunst sollten Sie diese Pyramide aus zwei Teilen innerhalb von fünf Minuten aufbauen können. Andernfalls müssen wir Ihnen raten, Ihre Bauvorhaben auf den Sandkasten zu beschränken.

Georg-Christoph-Lichtenberg-Gesamtschule
Integrierte Gesamtschule Göttingen-Geismar
FB Mathematik

Lernwerkstatt Mathematik



☞ Das Pyramiden - Puzzle

Pyramiden-Puzzle

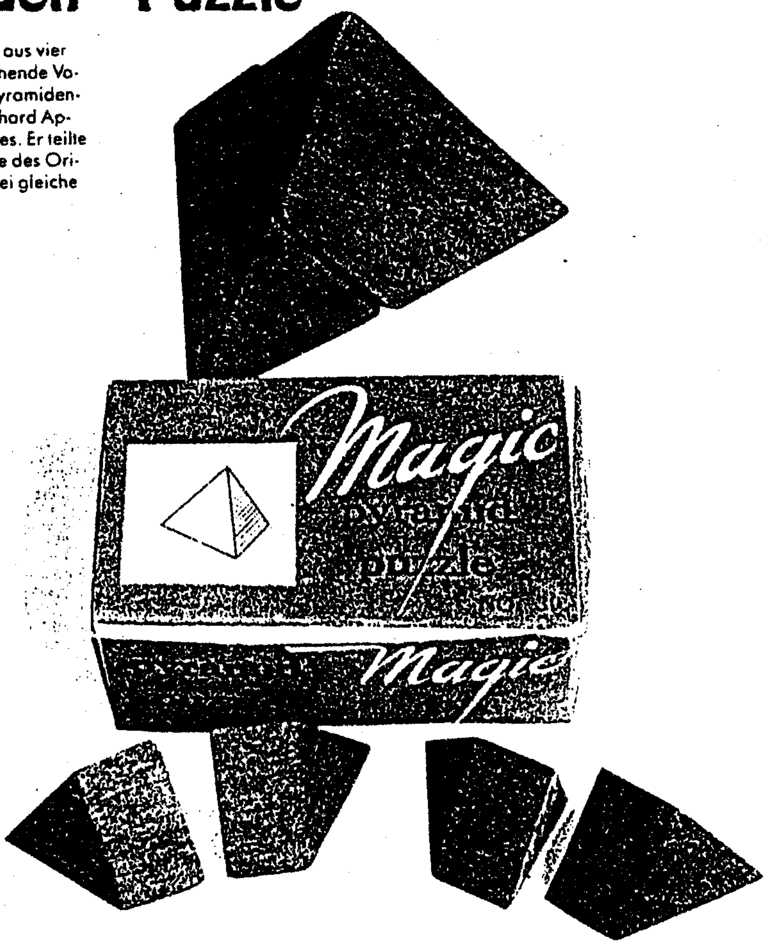
Dieses Zusammensetzpuzzle besteht aus zwei identischen Teilen und erscheint auf den ersten Blick zu einfach, um in ein seriöses Buch aufgenommen zu werden. Das Puzzle ist ein Tetraeder (eine Pyramide mit dreieckiger Grundfläche), der in zwei identische Steine geteilt ist. E.T. Johnson meldete dieses 1940 zum Patent an. Eine Plastikausführung wird seit 1956 von der Firma Fun Inc. Chicago verkauft.

Wie man dieses Puzzle baut:

Übertragen Sie die untenstehende Skizze zweimal auf ein Stück Karton. Ritzen Sie den Karton dann an den gestrichelten Linien und schneiden Sie die beiden Teile aus. Dann werden beide gefaltet und an den Falzen geklebt. Um das schwierige aus 4 Teilen bestehende Puzzle herzustellen, überträgt man die zweite Skizze viermal auf ein Stück Karton.

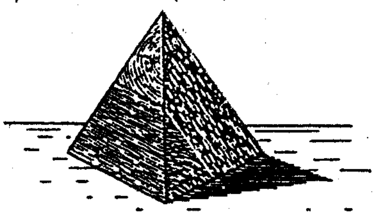
Dieses Puzzle wurde 1946 in dem Buch »Wunder in Holz« von E.M. Wyatt veröffentlicht. Dieses augenscheinlich einfache Puzzle bereitet mehr Probleme als man denkt.

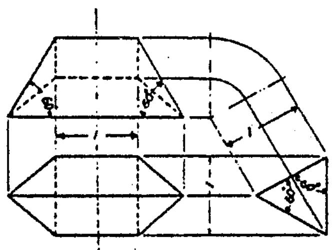
Dies ist eine aus vier Teilen bestehende Variante des Pyramidenpuzzles. Richard Appel entwarf es. Er teilte beide Stücke des Originals in zwei gleiche Teile.



THE TETRAHEDRON OR TRIANGULAR PYRAMID

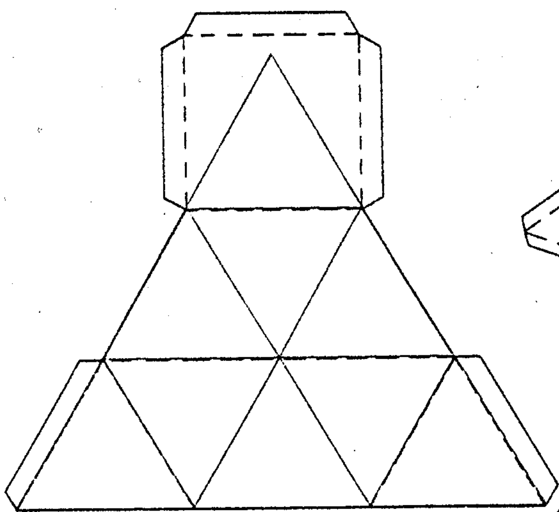
A fit-together puzzle of but two like pieces would seem too simple to challenge the interest of anyone but a child. The apparent simplicity of this puzzle, however, is quickly destroyed after many minutes have been spent by self-confident individuals

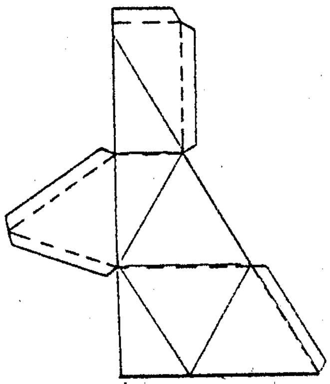


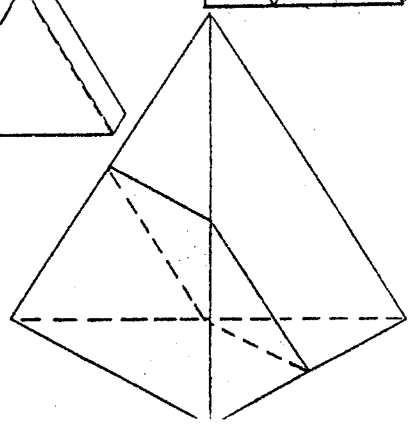


2 Required
Tetrahedron or Triangular Pyramid

[9]



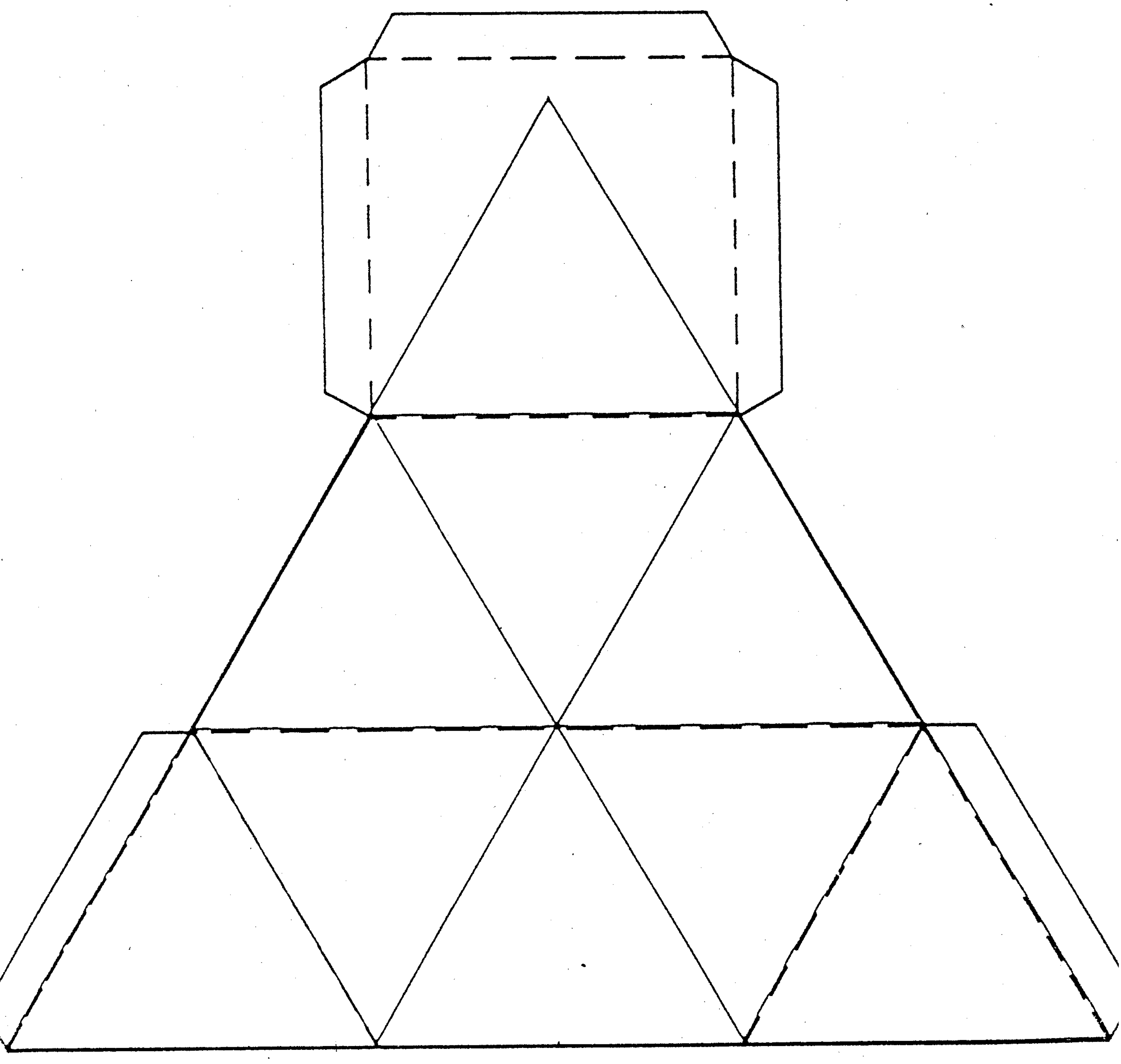




Die beiden Teile des Puzzles werden hergestellt, indem man die Skizze auf ein Stück Karton überträgt. Die aus vier Teilen bestehende Pyramide läßt sich mit Hilfe der rechts oben befindlichen Skizze herstellen.

Das Pyramiden - Puzzle

Übertrage die unten abgebildete Zeichnung zweimal auf ein Stück Karton. Ziehe die gestrichelten Linien mit dem Messerrücken nach; schneide dann die beiden Teile aus und klebe sie zusammen. Baue dann aus den beiden Teilen die Pyramide zusammen.



effekt - system

Bestellschein

Besteller (evtl. Schulstempel)

Dr. Peter H. Maier
Reinhold-Schneider-Straße 51
D - 79117 Freiburg

Fax: 0761/6966144

Datum

Unterschrift

Ich/wir bestellen zu den unten angegebenen Bedingungen

Anzahl	Artikel		Einzelpreis (DM)	Gesamtpreis (DM)
	Anleitung zur Herstellung des effekt - systems		4,80	
	Biegehilfe in Standardlänge Zum Biegen von Biegefalzen der Standardlänge (8 cm)		9,00	
	Schablonen-Set 'Standardlänge' im Format DIN A3 8 Schablonen: regelmäßige 3-, 4-, 5-, 6-, 8- und 10-Ecke, sowie zwei Rauten **Bestellen Sie eine ausreichende Anzahl an Schablonen-Sets, da bei jedem *Kopiervorgang Verzerrungen* auftreten, die dazu führen können, dass selbst kopierte Schablonen unbrauchbar sind!**		7,80	
	Biegehilfe in Überlänge Nur für Biegefalze in Überlänge (13 cm). Zum Biegen von Standardlängen nicht geeignet!		13,00	
	Schablonen-Set 'Überlänge' im Format DIN A3 7 Schablonen: 2 Dreiecke, Quadrat, Rechteck, 2 Trapeze, Parallelogramm **Bestellen Sie eine ausreichende Anzahl an Schablonen-Sets, da bei jedem *Kopiervorgang Verzerrungen* auftreten, die dazu führen können, dass selbst kopierte Schablonen unbrauchbar sind!**		7,80	
	1 Packung glasklare Kunststoff-Folien 5 Folien im Format DIN A3 passend zu den Schablonen	1 Folie genügt beispielsweise zur Herstellung von: 21 gleichseitigen Dreiecken oder 12 Quadraten; 6 Fünfecken oder 4 Sechsecken; 2 Achtecken oder 1 Zehneck	14,80	
	1 Packung rote, transparente Kunststoff-Folien 5 Folien im Format DIN A3 passend zu den Schablonen		16,80	
	1 Packung blaue, transparente Kunststoff-Folien 5 Folien im Format DIN A3 passend zu den Schablonen		16,80	
	1 Packung gelbe, transparente Kunststoff-Folien 5 Folien im Format DIN A3 passend zu den Schablonen		16,80	
			Summe	

NEU: Die farbigen Folien sind jetzt transparent!

Der Mindestbestellwert beträgt 50,00 DM, da ansonsten die Versand- und Verpackungskosten im Verhältnis zum Warenwert zu hoch wären.

Die Preise beinhalten die Mehrwertsteuer. Sollte die Mwst. erhöht werden, verändert sich der genannte Preis nach oben.

Die ausgewiesenen Preise sind freibleibend. (Stand: Juni 2000) Berechnet werden die am Tage der Lieferung gültigen Preise.

Die gelieferte Ware bleibt, wie allgemein üblich, bis zur vollständigen Bezahlung Eigentum des Lieferanten.

Berechtigte Reklamationen können nur innerhalb von 8 Tagen nach Wareneingang berücksichtigt werden und müssen schriftlich eingereicht werden.

Transportschäden können nur dann anerkannt und bearbeitet werden, wenn der Empfänger eine sofortige Tatbestandsaufnahme bei der Post oder dem anliefernden Spediteur veranlaßt. Dies ist auch bei äußerlich unbeschädigter Verpackung notwendig.